

Bifurcaciones en un Sistema de Tráfico Vehicular

Mónica Jhoana Mesa Mazo

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación.
Manizales, Colombia
2014

Bifurcaciones en un Sistema de Tráfico Vehicular

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctora en Ingeniería Automática

Director:
Ph.D., Gerard Olivar Tost

Línea de Investigación:
Análisis de Sistemas Dinámicos - Métodos Numéricos
Grupos de Investigación:
Percepción y Control Inteligente - PCI
ABC Dynamics

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación.
Manizales, Colombia
2014

Bifurcations in a Traffic System

A Thesis presented for the degree of:
Doctor of Engineering Automatica

Thesis advisor:
Gerard Olivar Tost, Ph.D.

Research Areas:
Dynamical analysis - Numerical methods
Research group:
Perception and Intelligent Control - PCI
ABC Dynamics

Universidad Nacional de Colombia
Faculty of Engineering and Architecture, Department of Electrical, Electronic and Computer
Science
Manizales, Colombia
2014

A Mary Luz S. Fonseca.

Agradecimientos

Tengo grandes motivos de gratitud con Dios y las siguientes personas e instituciones que vivieron paso a paso la escritura de esta tesis y hacen parte de ella por lo mucho que contribuyeron con ánimo, compañía, apoyo, aportes, sugerencias, correcciones, o las seis cosas juntas: Gerard Olivar, Gustavo Osorio, Johnny Valencia, Maria Edith Mazo, Luis Henry Mesa, mis hermanos, Mary Luz S. Fonseca, Sofia Mamian, Diego Quintero, Juan Gabriel Vergaño y familia, la Universidad del Quindío y la Universidad Nacional de Colombia.

A toda mi familia y amigos que estuvieron pendientes de mi progreso y que nunca dejaron de creer en mi. Hoy después de un largo recorrido quiero decirles: **GRACIAS**

Resumen

En este trabajo se presenta una visión general y simulación de un modelo de tráfico vehicular. Este describe la dinámica de un solo vehículo que se desplaza a través de una secuencia de semáforos que se enciende y se apaga con una frecuencia específica. El modelo incluye tres modos dinámicos: acelerado, desacelerado y nulo. Además se muestra la descripción del modelo matemático utilizado para simular el sistema. La simulación se desarrolló bajo un esquema basado en eventos e implementado en Matlab. En cuanto al análisis numérico, se construyó diferentes diagramas de bifurcación variando el ciclo del semáforo. Como principal resultado se evidencian los efectos del ciclo del semáforo en el comportamiento dinámico del sistema.

Dependiendo de la configuración de los parámetros se pueden implementar estrategias de optimización. Por ejemplo, el fenómeno de ola verde el cual permite reducir el tiempo de viaje y el consumo de combustible del vehículo dado que minimiza el número de paradas, durante el recorrido sobre la vía.

Palabras clave: Modelo suave a trozos; tráfico vehicular; análisis numérico; bifurcaciones; caos.

Abstract

In this paper we present an overview of a vehicular traffic model and its simulation. This model is characterized by a single vehicle traveling through a sequence of traffic lights that turn on and off with a specific frequency. The model includes three main dynamical modes, accelerated, decelerated and null state. We will show the description of the mathematical modeling used to simulate the system. The simulation was developed under an event driven strategy and implemented in Matlab. Regarding to the numerical analysis, we built different bifurcation diagrams where the parameter under variation is the cycle of traffic lights. As a principal result, we evidence the effects of the cycle of traffic lights in the dynamical behavior of the system.

Depending on the configuration of the parameters can be implemented optimization strategies. For example, the green wave phenomenon which reduces travel time and fuel consumption due the vehicle minimizes the number of stops along the route.

Keywords: Piecewise smooth model; vehicular traffic; numerical analysis; bifurcations; chaos.

Contenido

Agradecimientos	IX
Resumen	XI
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	3
1.2. Estrategias implementadas para los sistemas de tránsito	6
1.3. Modelado matemático del flujo vehicular	7
1.3.1. Modelos microscópicos	8
1.3.2. Modelos macroscópicos	9
1.3.3. Modelos mesoscópicos	14
2. Modelo matemático para un solo vehículo	18
2.1. Descripción del modelo	19
2.1.1. Distancia de Seguridad	21
2.2. Normalización del modelo	23
2.3. Descripción del modelo suave a trozos para un sólo vehículo	27
2.4. Esquema numérico	29
2.5. Simulaciones numéricas	31
2.5.1. Diagrama de bifurcación	32
2.5.2. Evolución en el tiempo	33
3. Análisis de simulaciones numéricas	41
3.1. Primer escenario	42
3.1.1. Esquema numérico	42
3.2. Segundo escenario	47
3.2.1. Esquema numérico	48
3.3. Tercer escenario	55
3.3.1. Esquema numérico	56
4. Estabilidad	63
4.1. Órbita 1T-periódica	65
4.2. Órbita 2T-periódica	70

5. Consumo de combustible	75
5.1. Energía-trabajo	75
5.2. Consumo de combustible para una órbita 1T-periódica	77
5.2.1. Consumo de combustible normalizado	80
5.3. Consumo de combustible para una órbita 2T-periódica	80
5.3.1. Consumo de combustible normalizado	84
5.4. Consumo del combustible para la ola verde	85
5.4.1. Consumo de combustible normalizado	86
6. Conclusiones	87
A. Anexo: Trabajos futuros	89
A.1. Control Óptimo	89
A.1.1. Problema de control óptimo	90
A.1.2. Principio del máximo de Pontryagin	91
A.2. Optimización	94
A.2.1. Ecuación de Euler Lagrange	95
A.3. Otras propuestas	97
Bibliografía	98

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI
L	Distancia	m
x_1	Distancia	m
x	Distancia	m
x_0	Posición inicial	m
d	Distancia	m
$x_1^{(i)}$	la posición final en el i-ésimo tramo	m
$x_1^{(0)}$	posición inicial de la trayectoria	m
$x_2^{(0)}$	velocidad inicial de la trayectoria	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$x_2^{(i)}$	la velocidad final en el i-ésimo tramo	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
d_r	Distancia recorrida	m
d_s	Distancia seguridad	m
v	Velocidad	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
v_f	Velocidad final	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
v_0	Velocidad inicial	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
x_2	Velocidad	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
a	Aceleración	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
a_+	Aceleración positiva	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
a_-	desaceleración	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
v_{max}	Velocidad máxima	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
m	Pendiente	— — —
t	Tiempo	s
T	Periodo	s

Símbolo	Término	Unidad SI
T_c	Tiempo crucero	s
T_s	Periodo normalizado	— — —
u	Velocidad normalizada	— — —
y	Distancia normalizada	— — —
A_+	parámetro normalizado	— — —
A_-	parámetro normalizado	— — —
r	número de vehículos	— — —

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI
ω	Frecuencia	s^{-1}
ϕ	Fase	<i>radianes</i>
τ	Tiempo normalizado	— — — — —
θ	Función de Heaviside	

Subíndices

Subíndice	Término
n	n-ésimo
s	semáforo
r	recorrida
c	crucero
max	máxima

Superíndices

Superíndice	Término
i	i-ésimo

Abreviaturas

Abreviatura	Término
$MRUA$	Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado
$1T_{S_+S_{0m}S_-S_0}$	Órbita 1T-periódica
$2T_{S_+S_{0m}S_-S_+S_{0m}S_-S_0}$	Órbita 2T-periódica

1. Introducción

De cada seis seres humanos que habitan en el planeta, tres viven en ciudades y dos de ellos pertenecen a países en desarrollo. La población urbana total se estima en 3.100 millones (1.000 millones en 1960 y 2000 millones en 1985). Según estimaciones de las Naciones Unidas la tasa de crecimiento de la población urbana total es de 1.9 por ciento anual. El continuo crecimiento de las ciudades origina demandas crecientes sobre la infraestructura social requeridas para atender las necesidades comunes. La disponibilidad de una adecuada infraestructura de transporte urbano que permita movilizar a personas y bienes de modo digno, económico y rápido se integra en el grupo de necesidades básicas.

Este problema de movilidad es compartido por casi todas las ciudades del mundo, dado que la creciente motorización y extensión del uso de automóvil privado genera dificultades en la movilización en las ciudades, así como costos sociales en el campo ambiental y de accidentalidad. En las últimas décadas, las fuentes móviles han contribuido o incrementado los problemas de contaminación como consecuencia de los gases que se emiten por los tubos de escape. Los principales contaminantes lanzados por los automóviles son: monóxido de carbono (CO), óxidos de nitrógeno (NOx) e hidrocarburos no quemados (HC). Por ejemplo, en el nivel mundial se estima que hacia el año 2015 las zonas urbanizadas causarán el 80 por ciento de las emisiones de CO_2 . [47].

La contribución de los vehículos a la contaminación ambiental es debida a la combustión de estos que generan gran cantidad de gases contaminantes, entre los cuales se tienen:

- **Dióxido de azufre:** Cada 3000 litros de gasolina quemada por un vehículo contamina el aire con $7,5Kg$ de este gas, el cual ocasiona daños en los pulmones y otras partes del sistema respiratorio [1].
- **Monóxido de carbono:** De cada 1.000 litros de gasolina quemada por los automóviles, resultan casi $375Kg$ de monóxido de carbono expelidos a la atmósfera. Cuando una persona constantemente respira monóxido de carbono se crea un estado de intoxicación permanente, algunos síntomas de intoxicación son náuseas, debilidad, dolor de cabeza y mareos [1].
- **Hidrocarburos y óxidos de nitrógeno:** Estos gases son producto de la combustión incompleta, su principal fuente son los motores de los automóviles. La causa es que cada vez que se aumenta o disminuye la velocidad de un automóvil, se reduce la eficiencia

de la máquina provocando una combustión incompleta, problema que es mucho más frecuente en las ciudades más transitadas. El humo producido por los automóviles contiene cerca de 200 distintos hidrocarburos, el bióxido de nitrógeno es nocivo para los pulmones y constituye una causa importante de irritación de los ojos, el óxido nítrico disminuye la capacidad de la sangre para transportar oxígeno [1].

Además la congestión vehicular fuera de contribuir a la contaminación del aire también produce contaminación acústica que cada día es más frecuente en las zonas más transitadas. Esto se debe a que movilizarse en algunas ciudades no es tarea fácil, dado que la oferta de la infraestructura no cubre las necesidades de la gran demanda hacia dicha oferta. Esa desigualdad produce los efectos que están padeciendo hoy en día las ciudades de Colombia. Las consecuencias más graves de la congestión vehicular son la reducción de la movilidad, el aumento tanto del consumo de energía como de la contaminación, además de la pérdida de tiempo. Una de las causas de esta congestión vehicular es la falta de sincronización de los automóviles, de un lado y la frecuencia de cambio de los semáforos, de otro [35].

Colombia ha implementado diferentes estrategias con el fin de mejorar el flujo vehicular pero a pesar de los esfuerzos, el problema aún persiste. Además se ha observado a lo largo de la historia, que el flujo vehicular se ha ido incrementando constantemente, mientras que los recursos proporcionados para el desarrollo de la infraestructura vial han sido limitados, esto se ha reflejado en situaciones donde el volumen de tránsito en uno o más puntos de una vía excede el volumen máximo que puede pasar por ellos. Por lo tanto, el control de tráfico inteligente se convertirá en una herramienta muy importante en el futuro, para controlar la congestión vehicular y beneficiar así, la calidad de vida de las personas, el medio ambiente y la economía, ya que en una ciudad donde no exista una buena movilidad, se aumentará de manera alarmante el nivel de estrés de los conductores y sus peatones, además se disparará los índices de contaminación.

Supóngase una avenida sin intersecciones la cual mueve r carros en un lapso de tiempo, la contaminación será proporcional a r . Pero si sobre dicha avenida se construye una intersección con semáforos, por la cual, cruzan igualmente r vehículos en el mismo tiempo, la contaminación en la zona no será proporcional a $2r$, sino mucho mayor, ya que detener los autos en los semáforos implica mayor consumo de gasolina cada vez que se frena y se arranca nuevamente. Por lo anterior, y por los retrasos que ocasionan a los conductores, antes de considerar los semáforos como elementos de control que proporcionan seguridad y movilidad al flujo vehicular, se debe también considerarlos como los responsables de la mala circulación vehicular y el aumento de la contaminación cuando son mal ubicados y/o mal configurados [35].

Si al aumento del parque automotor en las ciudades se le suma el mal funcionamiento de herramientas como el semáforo, entonces la problemática será cada vez más compleja. En

virtud a la gran problemática de movilidad que enfrentan las ciudades colombianas, nace la necesidad de realizar estudios teórico-prácticos que permitan plantear modelos matemáticos que describan los sistemas de tráfico vehicular y, con ellos, se obtengan fundamentos científicos con el objetivo de proponer posibles estrategias que ayuden a mejorar el flujo vehicular. Por esta razón esta investigación pretende estudiar la influencia de los semáforos en términos de su ubicación y parámetros de configuración en el flujo vehicular.

De lo anterior se concluye que para comprender el comportamiento complejo de los sistemas de tráfico vehicular, es necesario conocer la influencia del sistema de semaforización en un solo automóvil. Por esta razón esta investigación propone modelar la dinámica de un solo vehículo que viaja a través de una secuencia de semáforos de dos estados (verde y rojo), con base en el modelo propuesto por Toledo [66]. Este tipo de modelos matemáticos podrían servir de apoyo para comprender la influencia de los semáforos en el comportamiento del flujo vehicular para plantear estrategias basadas en la configuración de los semáforos, que permitan optimizar el tiempo de desplazamiento sobre una vía y el consumo de combustible.

1.1. Estado del arte

Existe diversos estudios realizados en modelación de tráfico vehicular, algunos de estos estudios se mencionan a continuación:

un gran problema que aún persiste desde el siglo veinte, es como organizar el tráfico vehicular en las ciudades. A mediados de los cincuenta Lighthill y Whitham utilizaron el método de las ondas cinemáticas para pronosticar el comportamiento del flujo en diferentes tipos de cruces en una vía, esta teoría de ondas se ha utilizado para encontrar la región de mayor congestión vehicular, a lo largo de una calle principal con cruces peatonales. [43].

Posteriormente, Kai Nagel and Michael Schreckenberg introducen un modelo autómatas discreto estocástico para simular el tráfico en una autopista, aplicando el método Montecarlo. Las simulaciones de este modelo muestran una transición del flujo de tráfico a ondas de (inicio-parada) con incremento de la densidad vehicular. Este modelo se basa en la relación parabólica entre el flujo φ y la densidad ρ , dicha relación tiene a la velocidad como tercera variable. Esta ecuación es considerada como una de las más importantes en el análisis de tráfico vehicular y a menudo es escrita así: $\varphi = \rho v$. Dado que la velocidad es un parámetro que puede variar debido a diferentes aspectos en una vía, entonces en este modelo autómatas se determinaron diferentes familias de curvas según los supuestos y las leyes que lo rigen [50].

En el 2004, Toledo construye un modelo en el cual se considera un solo vehículo moviéndose a través de una secuencia de semáforos de dos tiempos, con un período específico, la contribución importante de este trabajo es que la dinámica no trivial depende de la aceleración finita

y a la capacidad de frenado de los vehículos para un conjunto de parámetros [66]. Debido al desarrollo complejo que presentan los sistemas de tráfico en un trabajo posterior Toledo, Cerda y Muñoz en el 2007, plantean estrategias de control, basadas en la sincronización de los semáforos, estas estrategias permitieron demostrar que los sistemas de tránsito fueran menos caóticos. Además, en este trabajo se analizó un fenómeno muy interesante como lo es la resonancia en términos del tiempo de viaje, la velocidad y el consumo de combustible. Un resultado importante del modelo de Toledo aplicando las estrategias de control es que el comportamiento cercano a la resonancia no depende de la aceleración finita y la capacidad de frenado del vehículo. En este modelo determinista de Toledo se estudió la resonancia para un solo vehículo viajando a través de una autopista y se demostró que la resonancia era un comportamiento universal independiente de la geometría de la vía para el caso de la estrategia de la ola verde. [65]

En el 2009, Varas y Cornejo investigaron si el comportamiento universal estudiado por Toledo cercano a la resonancia persiste cuando varios carros interactúan sobre una misma vía. Para conocer el comportamiento de esta dinámica hicieron uso de un modelo autómatas celular, además encontraron que para la ola verde, la ley de escala crítica de la velocidad media permanece incluso en la separación aleatoria entre los semáforos y no es dependiente de la densidad. La independencia de la densidad del carro es interrumpida cuando las perturbaciones aleatorias son consideradas en la velocidad del auto. Las perturbaciones aleatorias en la velocidad también tienen el efecto de dejar el sistema en un estado emergente, donde los carros se mueven en grupos, pero con una velocidad media la cual es independiente del cambio de los semáforos.[70].

Una nueva exploración, en el 2010, se le hace al comportamiento caótico y no trivial del modelo propuesto por Toledo. Se muestra que el comportamiento no trivial surge incluso en la región no caótica debido a la existencia de trayectorias periódicas que tienen múltiple periodo, donde esta dinámica microscópica no puede ser observada en un modelo autómatas celular tradicional. Para realizar el análisis del comportamiento caótico y de la dinámica no trivial, encontraron la región caótica, la cual se define como la región del diagrama de bifurcación donde se puede estimar un exponente de Lyapunov positivo. Para caracterizar la región caótica del modelo propuesto por Toledo, encontraron los límites de la región en la cual ocurre el comportamiento caótico y la dinámica no trivial y calcularon numéricamente los exponentes de Lyapunov. Al realizar el proceso anterior concluyeron que cuando se incrementa la capacidad de frenado, la región caótica aumenta su tamaño en el espacio de parámetros y cuando se incrementa la capacidad de frenado tres veces o más que la capacidad de aceleración se obtiene caos. [72]

Es importante mencionar algunos trabajos que incluyen los buses del transporte público y conocer su dinámica cuando interactúan con los semáforos. Wei-neng Huang en el año 2008,

estudió la distribución del tiempo de un bus interferido por el funcionamiento de los semáforos. En este trabajo se demuestra que la distribución del tiempo-avance puede ser modificado de manera significativa mediante un semáforo cercano y se concluye que el tiempo promedio de avance de un bus transmite poca información a los pasajeros para estimar el tiempo de su llegada [76]. Villalobos, en su tesis doctoral, estudia el caos en sistema de tránsito, en uno de sus modelos considera un bus viajando a través de una secuencia de semáforos con la posibilidad de parar entre los semáforos a recoger o a dejar pasajeros, en una parada fija. Este modelo es una buena representación del Sistema de Bus Rápido (Bus Rapid Transit), debido a que las vías que usan los buses de este sistema no interactúan con otros vehículos. [73]. Un esquema de control híbrido para sistemas de tráfico en autopistas es trabajado por Sacone y Siri, en el 2011, el cual es caracterizado por la combinación del tiempo conducido y la dinámica de los eventos de conducción con el objetivo de reducir el fenómeno de congestión en las autopistas [58].

Debido a la gran congestión que ocurre en las ciudades de Colombia, vale la pena mencionar algunas investigaciones que se han realizado en algunas de estas ciudades. Por ejemplo, se ha intentado modelar el flujo vehicular de la ciudad de Bogotá, dado que su sistema de transporte es realmente congestionado y caótico. Algunos de estos trabajos que modelan diferentes escenarios de su sistema de transporte son de L.E Olmos, J.D Muñoz, en el 2004. En los cuales para conocer el comportamiento del flujo vehicular, proponen un modelo autómatas celular que reproduce el comportamiento experimental de la dinámica vehicular incluyendo tres elementos, el primero es el espacio que usa el conductor para decidir si acelera o frena frente a cierta situación. Es decir, la histéresis entre la aceleración y el frenado, el segundo elemento es el tiempo que el automóvil toma para alcanzar el próximo valor de velocidad, este permite encontrar el tiempo de retraso en la aceleración, tercero y último es el tiempo de reacción de frenado instantáneo debido a que el carro de adelante frena de manera inesperada. [52]. Además estos autores en un trabajo posterior construyen dos modelos autómatas celulares, el primero para una vía de un solo carril en la cual viajan carros particulares y, en el segundo se considera una autopista de dos carriles y tráfico mezclado, es decir, vehículos particulares y buses. Como resultado de estos modelos se obtuvieron los diagramas de flujo y densidad los cuales fueron comparados con datos experimentales. Estos modelos muestran que la causa de que haya un flujo alto son los pequeños espacios que los conductores bogotanos mantienen con el vehículo de adelante, incluso en velocidades altas [53].

En el año 2007, Salcedo, Pedraza y Hernández, presentan el diseño de un modelo de tráfico vehicular, el cual examina el tráfico existente en una vía principal de Bogotá, a través de una serie de semáforos, en este modelo se implementan algunas estrategias de control sincronizando el tiempo de duración y de desfase de los semáforos. Lo importante en este trabajo es la utilización de Sistemas de Inferencia Difusa Basados en Redes Adaptativas [59].

1.2. Estrategias implementadas para los sistemas de tránsito

Durante los años 90 las principales ciudades de América Latina emprendieron grandes programas con el objetivo de mejorar la dinámica del flujo vehicular. Una de las estrategias fue la construcción de grandes autopistas, vías urbanas, sistemas de semaforización, que llevaron a mejorar la infraestructura vial, pero la insuficiencia de los impactos obtenidos a través de esta nueva infraestructura, condujo a que se implementaran nuevas estrategias como el Sistema de Bus Rápido (Bus Rapid Transit "BRT"), en 1995 se construyó el primer ramal de la ciudad de Quito. Desde el 2000 la instalación y operación de estos sistemas ha registrado una gran expansión, que comprende TransMilenio en la ciudad de Bogotá, (1998); el sistema "Interligao" Sao pablo, Brasil (2003), el BRT de México (diseñado para complementar el metro), el Megabús de Pereira (2006), en Guayaquil (2006), Guatemala (2007), En el 2009 entró en operación el sistema Masivo Integrado de Occidente "MIO", en Santiago de Cali. También en diciembre de 2009 se puso en funcionamiento, en forma pre-operativa en Bucaramanga, Metrolínea y, por último, el Metroplus el 22 de diciembre de 2011 en la ciudad de Medellín.

En estos últimos años, científicos norteamericanos y rumanos han desarrollado un modelo informático basado en información real que atribuye inteligencia a los semáforos para optimizar la gestión del tráfico. De esta forma han comprobado que se reduce un 28 por ciento del tiempo de espera en los cruces en hora punta y un 6,5 por ciento las emisiones de CO_2 [49].

Otras estrategias implementadas son las ciclo rutas, puentes peatonales en puntos estratégicos, restricciones sobre el uso de automóviles privados en las horas pico y un gran número de campañas en favor de una mejor cultura cívica. Sin embargo, a pesar de todas estas estrategias, la congestión del tráfico continúa y sigue produciendo una serie de efectos negativos en la población.

Adicionalmente, vale la pena mencionar otro tipo de estrategias que se han utilizado en busca de dar posibles soluciones a la problemática de la congestión vehicular, entre las cuales se encuentran:

1. **Estrategias de tiempo fijo:** Mediante el uso de registros históricos de flujo vehicular y densidad vehicular, las estrategias de tiempo fijo son ajustadas a periodos de tiempos largos donde los parámetros se asumen constantes. A continuación se muestran las principales herramientas y/o algoritmos utilizados bajo las estrategias de tiempo fijo [56, 54]:
 - *Control de intersecciones aisladas con tiempos fijos:* En esta estrategia, los tiempos en verde y de la fase son optimizados con base en registros históricos del tráfico. Los ejemplos mas conocidos de este tipo de estrategias son el SIGSET (programa en fortran) y el SIGCAP. El primero busca minimizar el tiempo total

de espera en una intersección [3] y, el segundo busca maximizar la capacidad de la intersección [4].

- *Control coordinado de intersecciones con tiempo fijo*: Estas estrategias son las más utilizadas al rededor del mundo debido a su buen desempeño en condiciones de no saturación. Además no requieren instrumentación para medir el estado de las redes en tiempo real; entre los ejemplos mas comunes de este tipo de estrategia se tienen, en MAXBAND y UTCS, los cuales procuran maximizar el ancho de banda de las avenidas principales. Cabe mencionar que el MAXBAND es la encargada de introducir la denominada ola verde, la cual consiste en maximizar el número total de vehículos que logren atravesar la mayor cantidad de semáforos a lo largo de una vía a una velocidad determinada.
2. **Estrategias de control sensibles al tráfico**: A diferencia de las estrategias de tiempo fijo, en estas estrategias se ejecuta su lógica de actuación con base en mediciones de tráfico vehicular en tiempo real. De igual forma estas estrategias se dividen en dos: *Control sensible al tráfico de intersecciones aisladas*: entre las estrategias más relevantes de esta categoría se encuentra el denominado método de intervalos de vehículos y su versión evolucionada MOVA. La diferencia entre estas dos versiones es que la primera incrementa el tiempo de verde cada vez que se detecta un vehículo dentro de un intervalo crítico; y la segunda realiza con una periodicidad determinada, un análisis de costos y beneficios sobre la decisión de cambiar de fase en la interacción actual o en la siguiente [56].
 3. *Control sensible al tráfico de intersecciones coordinadas*: en el caso de las estrategias centralizadas, la información recopilada por el sistema de sensores es enviada a un centro de control de tráfico urbano, donde es procesada para calcular los tiempos óptimos. Estos tiempos son entonces enviados a cada controlador de semáforos [56].

1.3. Modelado matemático del flujo vehicular

La parte más difícil al usar las matemáticas para estudiar una aplicación es la conversión de los fenómenos de la vida real al formalismo matemático. Por lo general esto es complicado porque implica la conversión de hipótesis imprecisas en fórmulas precisas. La modelación no es fácil, lo importante es recordar que el estudio de un sistema dinámico conlleva varias etapas, las cuales se resumen en los siguientes enunciados:

- Identificar el sistema real de interés.
- Construir un sistema modelo que represente de manera simplificada el sistema real de interés, su dinámica y sus interacciones principales que determinan el comportamiento dinámico.

- Establecer las suposiciones necesarias que permitan la formulación de un modelo (amigable) y viable en su aplicación, que represente de manera apropiada las propiedades fundamentales que se quieren estudiar.
- Evaluar el sistema modelo y sus predicciones con relación a las características y propiedades del sistema real [14].

Es conveniente anotar que los modelos no se deben confundir con la realidad, ya que ellos representan solo una visión simplificada del sistema físico real. Estos solo incluyen un conjunto de variables que caracterizan de manera completa el estado del sistema, incorporan parámetros de control y dan una regla de transformación de estados del sistema como una operación que genera datos de salida a partir de datos de entrada.

Existe muchas aproximaciones matemáticas que intentan modelar el flujo de tráfico vehicular en términos de alguna de sus características. Gracias al carácter estocástico y multivariable del tráfico vehicular se han desarrollado modelos de este flujo de diferentes formas. A partir de allí, se determinó que el flujo puede tener diferentes enfoques: macroscópico, mesoscópico y microscópico y que, en general, todos los modelos deben ser regidos por las mismas variables fundamentales: velocidad, densidad y flujo, y por relaciones o ecuaciones entre dichas variables [51].

1.3.1. Modelos microscópicos

Estos modelos, presentan la escala más pequeña para el acercamiento al análisis de los sistemas de tráfico urbano. Además estos buscan describir el comportamiento de un ser humano al volante de un automóvil cuando es influenciado por los diferentes estímulos y obstáculos típicos de una vía [56, 35]. Algunos modelos microscópicos son:

- **Modelos del carro siguiente:** Busca estudiar el comportamiento de un vehículo con respecto del vehículo que va adelante [20]. Por ejemplo el modelo de Gipps, el cual estima la respuesta del vehículo siguiente basado en el supuesto de que cada conductor establece límites a su aceleración y desaceleración. Además, asume que el conductor del vehículo siguiente no sobrepasa la velocidad crucero y cuando la consigue, inmediatamente su aceleración se hace cero [27].
- **Modelos de la General Motor:** En general, trabajan con un solo principio: Respuesta = función (Sensibilidad, Estimulo). La Respuesta está siempre representada por la aceleración o desaceleración del vehículo siguiente y el estímulo por la velocidad relativa entre el vehículo precedente y el vehículo siguiente. La diferencia entre este tipo de modelos está en como se representa la sensibilidad [35].

- **Modeling traffic through a sequence of traffic lights:** Todelo, en el año 2004, introduce un modelo de tráfico microscópico, basado en el comportamiento cinemático, que consta de un solo vehículo que se desplaza a través de una secuencia de semáforos que se encienden y apagan con una frecuencia específica [66].
- **Modelos autómatas celulares:** Los más reconocidos son los modelos de Kai Nagel, Michael Schreckenberg, M. Bando, M. Fukui y Y. Ishibashi [38, 34, 50].
- **Algoritmo genéticos y modelos autómatas celular:** Sánchez, J. se presenta en [60] una metodología para la optimización de los ciclos de un semáforo en una red de tráfico. Se diseña un modelo de tráfico microscópico y se usa además un autómata celular. Con esta teoría los vehículos se consideran como entidades unidimensionales, las calles se ejemplifican como un conjunto de puntos; en cada punto solo puede haber un vehículo en cada instante de tiempo. Para alcanzar una solución del problema se representa el estado de los semáforos mediante un cromosoma, que tiene longitud variable en función del período de tiempo que se quiera optimizar, aunque se supone que ese período de tiempo representa un ciclo base que se repite indefinidamente. Este cromosoma está compuesto por valores enteros que representan qué semáforo está abierto en el cruce en cada momento. Los resultados obtenidos con esta codificación y el simulador descrito muestran que aparte de ser una forma válida, permite optimizar varias intersecciones al mismo tiempo, lo que reduce los tiempos de cálculo con respecto a otras soluciones.
- **Modelo de Conservación vehicular:** Especialmente diseñado para simulación de flujo en autopistas de varios carriles. Se basa en la ecuación de conservación vehicular [5].

1.3.2. Modelos macroscópicos

Este tipo de modelos es apropiado para aplicaciones de gran escala donde las principales variables de interés se encuentran relacionadas con las características del flujo [56]. Además se enfocan en captar las relaciones globales del flujo de tráfico, tales como velocidad de los vehículos, flujo vehicular y densidad de tráfico. Por su naturaleza son modelos continuos que hacen uso extensivo de ecuaciones diferenciales. Incluye a los modelos de gases cinéticos y los hidrodinámicos. Helbing, Treiber y Pipes son algunos de los investigadores de mayor renombre en esta área. Dentro de los modelos macroscópicos existen modelos puramente empíricos, denominados modelos de capacidad y nivel de servicio, que renuncian al planteamiento preciso de ecuaciones diferenciales y se limitan a establecer relaciones empíricas entre las principales variables bajo control del diseñador [51].

Algunos modelos macroscópicos son:

■ Modelos de asignación de equilibrio

- **Equilibrio del usuario:** Un sistema gobernado por este modelo, asignará a los usuarios rutas hasta encontrar un equilibrio, de manera tal que para cada usuario, una vez todas las rutas estén asignadas, será imposible cambiar su ruta, sin incrementar el costo del viaje [46].
 - **Modelo de optimización del sistema:** Busca minimizar el tiempo total de viaje de toda la red, implica que cada usuario debe respetar una ruta asignada (no necesariamente la mejor) por el sistema, de manera tal que la optimización se lleve a cabo [46].
- **Modelo lineal de B. D. Greenshields:** Consiste en la linealización de un conjunto de datos obtenido por el investigador, donde se establecen las diferentes relaciones parabólicas, no solo entre la densidad y el flujo, sino también entre la velocidad y el flujo y una relación lineal decreciente entre la velocidad y la densidad [30].
- **Modelo logarítmico de H. Greenberg:** Este es uno de los modelos que apoyado en la analogía del flujo vehicular con el flujo hidrodinámico, tuvo más resonancia en la ingeniería y el estudio del tráfico. De la combinación y discretización de las ecuaciones de movimiento y continuidad de fluidos compresibles, aplicadas al flujo vehicular, se obtienen las principales ecuaciones. Se debe anotar que el modelo, tiene gran nivel de validez especialmente en flujos congestionados, pero que falla en condiciones de flujo libre [35, 29].
- En [41], adaptan el modelo clásico LWR *Lighthill-Whitham-Richards*, en una versión continua, el cual es aplicado a un sistema de redes. Para esto se realizaron varias adaptaciones específicas del modelo básico: introducción de flujos parciales, posiblemente flujos no homogéneos en los enlaces y el modelado de intersección. Como resultado de estos cambios se obtuvo un modelo macroscópico de flujo de tráfico de primer orden. Además, se discutieron tres diferentes enfoques de modelado y se demostró que los tres tipos de modelos están relacionados y compatibles con los modelos de flujo de enlace.
- Una de las principales variables de interés en los modelos macroscópicos es la dinámica de flujos. Por esta razón en [12] se considera un modelo matemático para flujos en redes viales, este modelo se basa en las leyes de conservación, donde las redes viales son estudiadas como gráficas compuestas por arcos que se encuentran en algunos nodos que corresponden a los cruces, las cuales juegan un papel importante. De hecho las interacciones ocurren en los cruces y el problema aquí es indeterminado. La aproximación de las leyes de conservación a lo largo de los arcos se lleva a cabo mediante el uso de métodos conservadores, como el esquema clásico de *Godunov*. Los problemas de *Riemann* se resuelven por medio de un algoritmo de simulación que procesa cada intersección. Además, se presenta el algoritmo y su aplicación para algunos casos simples

y para partes de una red urbana.

- En [16], se hace referencia a un modelo de dinámica de fluidos para el flujo del tráfico vehicular en una red vial la cual la definen como un conjunto de calles con cruces, donde consideran una sola ley de la conservación, deducida de la conservación del número de automóviles en una red de vial. El problema de evolución está indeterminado en los cruces, por consiguiente se eligieron algunas reglas fijas para la distribución del tráfico y un criterio de optimización para el flujo. Además se probaron la existencia de soluciones para el problema de Cauchy y mostraron que la dependencia continua de Lipschitz de los datos iniciales no se mantiene en general, pero se sostiene bajo ciertos supuestos.
- En [11], se propone una discretización basada en *Godunov* de un sistema hiperbólico de las leyes de conservación con flujo discontinuo, para modelar el flujo vehicular en una red. Cada ecuación describe la evolución de la densidad de vehículos que tienen una trayectoria en común a lo largo de la red. Se muestra que el algoritmo selecciona automáticamente una solución admisible en los cruces, por lo tanto, los procedimientos especiales externos (por ejemplo, la maximización del flujo a través de un método de programación lineal) usualmente empleando la teoría clásica no es necesario debido a que los usuarios no tienen que tratar explícitamente con la dinámica del vehículo en el cruce. Por último, el código numérico puede ser implementado en minutos.
- En [15], se aborda el problema de la regulación del tráfico vehicular, es decir, dada una intersección con algunas entradas y algunas salidas, es preferible regular el flujo a través de un semáforo o por medio de una rotonda?. El objetivo de este artículo fue entender qué solución tiene un mejor rendimiento desde el punto de vista de la cantidad total de vehículos que pasan por el cruce. Para hacer frente a este problema se consideró un modelo de dinámica de fluidos para el flujo de tráfico en una red vial. El modelo es el propuesto en [26] y se aplica para el caso de cruces con semáforos y con rotondas. Primero consideramos el tiempo del semáforo como control y determinamos los flujos asintóticos. Segundo, extendemos y completamos el modelo de [26] introduciendo algunos parámetros de la vía. También en este caso se determinó el comportamiento asintótico. Se comparó los resultados de las dos soluciones. Por último, se concluye que la elección es preferible, según el nivel de tráfico y la necesidad de control, y le damos indicaciones sobre la manera de ajustar el tiempo del semáforo y rotonda de acuerdo a los parámetros de la vía.
- **Un modelo para la formación y evolución de los atascos de tráfico:** En este artículo se realizó y analizó un modelo de flujo de tráfico, que describe la formación y la dinámica de los atascos vehiculares. De este análisis se obtuvo el comportamiento dinámico particular de grupos (o atascos de tráfico[8]).

- **Modelo exponencial de R. T. Underwood:** La formulación de este modelo busca representar más fielmente el comportamiento del flujo libre. Es más usado para modelar autopistas y avenidas o carreteras urbanas, donde se presenta más este fenómeno. Tiene mucha aceptación en condiciones de flujos no congestionados [68].

Modelos macroscópicos que incluyen flujo de peatones

- En este documento se hace un acoplamiento usando el modelo clásico macroscópico de *Lighthill-Whitham-Richards* para flujos de tráfico vehicular y para el flujo de peatones se usa el modelo de *Hughes*. Este nuevo modelo es investigado numéricamente, asumiendo diferentes situaciones físicas, donde los peatones y los vehículos interactúan entre sí[9].
- En [10] se discute el acoplamiento de flujo de tráfico con el movimiento de los peatones. Primero revisaron el acoplamiento del modelo *Lighthill-Whitham* para el tráfico en carretera y el modelo de peatones *Hughes* que se presenta en [9]. Además trabajaron diferentes escenarios numéricos e investigaron dicha interacción entre ambas dinámicas. También un enfoque especial le dieron a la colocación de cebras o paso para los peatones de tal manera que se facilitará el paso de ellos a través de una calle concurrida.
- En este artículo [55] se presenta una nueva clase de modelos macroscópicos para flujo de peatonales, donde cada individuo se supone que se mueve hacia un objetivo fijo. La ecuación resultante es una ley de conservación con un flujo no local. Cada ecuación en esta clase genera un semigrupo de Lipschitz de soluciones y es estable con respecto a las funciones y parámetros que la definen. Por otra parte, las propiedades cualitativas como la acotación de la densidad de peatones fue demostrada. Además, presentan modelos específicos y sus propiedades cualitativas son mostradas a través de integraciones numéricas.

Es importante mencionar que la teoría de control y optimización es utilizada en algunos modelos macroscópicos. Por ejemplo :

- En [24], se realiza un enfoque de optimización discreta para redes de suministro de gran escala basado en ecuaciones diferenciales parciales. En este trabajo se introduce un problema de control óptimo continuo gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales que modelan las cadenas de suministro sobre redes viales. Finalmente, investigaron propiedades numéricamente del modelo y obtuvieron resultados numéricos para un ejemplo del mundo real.
- Un problema de control óptimo de semáforos es analizado en [2]. Este consiste, en que conocidas las tasas de llegada y de salida de vehículos en un cruce, para un entero N dado, y un tiempo inicial t_0 , se calcula una sucesión t_1, \dots, t_N de instantes de cambio de las luces de los semáforos óptima bajo un criterio. El

criterio a considerar se expresa por medio de un funcional objetivo el cual es el que se desea minimizar.

- Igualmente, en [31] se consideran dos modelos para el flujo de tráfico sobre redes viales donde el flujo es controlado en los nodos de la red. Para la optimización analítica y numérica del control, el conocimiento del gradiente del funcional objetivo fue de gran utilidad. Determinaron el gradiente de dos maneras: primero, obtuvieron las ecuaciones adjuntas para el modelo de red de flujo de tráfico continuo y segundo encontraron las ecuaciones adjuntas para el modelo discreto. Además, presentaron algunos ejemplos numéricos para la solución de un problema de control óptimo para una red en particular de flujo vehicular.
- Wann-Ming Wey en [74] controla una intersección aislada aplicando técnicas basadas en la teoría de control de sistemas lineales para resolver el problema del modelo lineal de tráfico. La contribución principal de este artículo es el desarrollo de una metodología para aliviar la congestión recurrente en la intersección aislada, causada por la alta demanda del transporte, usando la tecnología existente.
- En [19], se analiza un problema de control óptimo de semáforos para un cruce de dos carreteras con los dos sentidos de circulación. Se expone primero, un modelo exacto y acíclico que describe la evolución de las longitudes de las colas en cada carril como una función del tiempo y de los instantes de cambio. También se expone la forma de determinar una sucesión switching subóptima para este sistema.
- Smith, M. J. en [62] argumenta el uso de señales de respuesta de la capacidad de la red (en vez del total de gastos de viaje) como criterio del control. La capacidad de la red se maximiza si las señales funcionan para igualar la densidad de tráfico en las zonas más ocupadas de la red. Este es otro ejemplo de optimizaciones locales múltiples en vez de una optimización global.
- Se presenta un nuevo modelo para las redes de tráfico vehicular [33], con base en una descripción detallada de las intersecciones. Para obtener las condiciones adecuadas en las uniones, se introducen ecuaciones que describen varios carriles y estos. El nuevo modelo resultante se compara con modelos actualmente conocidos para redes de flujo de tráfico. Finalmente, el modelo es utilizado para la simulación y optimización de redes.
- En [7], se presenta una revisión y análisis crítico de la literatura matemática en la modelización de los fenómenos de tráfico y multitud de vehículos. El estudio de los modelos se realizó a las escalas de representación y los marcos matemáticos que se utilizan para el enfoque de modelado. El documento también hace referencia a la dificultad que presenta el modelado de sistemas complejos, el cual consiste en grandes sistemas de individuos que interactúan de una manera no lineal, donde una de las

dificultades es el hecho de que estos sistemas son difíciles de modelar a un nivel global o macroscópico cuando es basado solo en la descripción de la dinámica de los elementos individuales. La revisión se concluye con un análisis crítico centrado en perspectivas de investigación que se centraron en el desarrollo de una estrategia de modelado unificado.

1.3.3. Modelos mesoscópicos

Son una aproximación de una mezcla de algunas características de los modelos macroscópicos y microscópicos. Los modelos mesoscópicos (cinéticos) definen una función que expresa la probabilidad de que un vehículo a determinada velocidad se encuentre en cierto tiempo en determinada posición [51].

- Un ejemplo de este tipo de modelos fue propuesto por Klar, A; Rascle, M; Materne, T, en el año 2002. En este trabajo establecen una conexión entre un modelo microscópico de seguimiento al líder basado en ecuaciones diferenciales ordinarias y una semidiscretización de un modelo continuo macroscópico con base en la ley de conservación. También se muestra rigurosamente que, al menos en el caso homogéneo, el modelo macroscópico puede ser visto como el límite de la discretización de tiempo del modelo microscópico con el aumento en el número de vehículos, con una escala en el espacio y el tiempo para el cual la densidad y la velocidad se mantienen fijas [39].
- En año 2001, Helbing, D. hace una revisión de los principales enfoques de modelado de tráfico de vehículos y peatones en [32]. En este artículo Helbing trabaja con datos empíricos y hace una formulación de un modelo que influyen características micro - macro, para el modelado de sistemas de muchas partículas auto-impulsado que incluye los sistemas de espín.

Debido al interés de esta investigación, es importante mencionar algunos trabajos realizados que incluyen el sistema de semaforización.

- El uso del semáforo es una de las estrategias de control de tráfico más populares que se han adoptado para la gestión de la demanda y reducir la congestión. Pero si no se diseña adecuadamente dará lugar a demoras y aumento del tiempo de viaje excesivo. Por lo tanto, las señales deben ser diseñadas con base a la teoría del flujo de tráfico que requiere un buen conocimiento del sistema de tránsito. En [71] propusieron un esquema de control con base en un modelo macroscópico para el tráfico de la India. En este modelo consideraron la densidad del tráfico y la velocidad como variables de estado para caracterizar el sistema y el esquema de control desarrollado regula la densidad dentro de las vías.
- En [28] realizaron un estudio a las redes de flujo de tráfico vehicular incluyendo semáforos en las intersecciones. Matemáticamente consideraron un modelo de tráfico dinámico

no lineal, donde los semáforos se modelaron por medio de funciones constantes a trozos para las señales rojas y verdes. El problema de control consistió en encontrar configuraciones (*stop and go*), las cuales dependen del volumen del tráfico presente. Además proponen una estrategia de solución numérica y muestran los resultados computacionales.

- Un algoritmo de búsqueda rápida para la sincronización óptima de la señal de un semáforo en las intersecciones sobresaturados individuales es propuesto en [42]. También ilustran la eficiencia del algoritmo con un ejemplo numérico de la literatura.
- Salcedo [59] propone un modelo de semaforización inteligente para la ciudad de Bogotá, basado en el modelo microscópico de tráfico vehicular de Toledo [66]. Este modelo describe el comportamiento cinemático de un solo vehículo que viaja a través de una secuencia de semáforos que encienden y apagan con una frecuencia específica y analiza un grupo de vehículos que viajan a través de una secuencia de semáforos que presenta distancias variables entre ellos. Él controla los semáforos para mantener la velocidad máxima de la corriente vehicular permitida en la vía.
- Espinosa en [22] desarrolló un controlador de tráfico difuso, que dispone de un algoritmo de visión artificial, el cual contabiliza el número de automóviles presentes en imágenes, captadas por cámaras que están ubicadas estratégicamente y en respuesta, proporciona la secuencia de acciones que optimizan el flujo vehicular, haciendo que opere de manera autónoma, centralizada y eficiente. Cabe destacar que en la aplicación del algoritmo, obtuvieron una disminución del 20 por ciento en los tiempos de retraso para cada vehículo, además de demostrar su rápida adaptabilidad y eficiencia a los cambios propios del tráfico vehicular.
- Debido a los embotellamientos en la ciudad de Bogotá, Rogelez en [57] describe un prototipo de un sistema de semaforización inteligente que controla los tiempos de iluminación verde, roja y amarilla de los semáforos, con el objetivo de minimizar la congestión vehicular de la ciudad. El sistema aprende cómo se comporta el tráfico y sabe cómo condicionarlo con base en los algoritmos genéticos. Para esto realiza un seguimiento continuo del flujo vehicular y con esta información crea las primeras generaciones de tiempos para los semáforos. Luego revisa cuáles tiempos se adaptaron mejor al sistema, es decir, aquellos que minimizaron el tráfico y, finalmente, a través del cruce y la mutación que provee el método de aprendizaje de los algoritmos genéticos que simulan un proceso evolutivo, controla el tráfico de la ciudad y ayuda a minimizar los tiempos de recorrido del sistema de transporte masivo Transmilenio.
- Jiménez y Sarmiento determinaron una propuesta metodológica con variables claves para desarrollar sobre un corredor vial arterial con tráfico interrumpido un sistema adaptativo de control y optimización del tráfico, *SACOT*, que ajuste el funcionamiento

de los semáforos en tiempo real de acuerdo con el número de vehículos que llegan a un cruce, medidos en términos de densidad vehicular, y cuyos datos son procesados On Line, esta propuesta fue aplicada a la ciudad de Medellín[36].

A continuación se hace una breve descripción de cada capítulo de esta investigación:

En el capítulo 2, (*Modelo matemático para un solo vehículo*), se realiza la descripción del modelo suave a trozos Ec.(2-1), mediante el cual se describe la dinámica de un solo vehículo que se desplaza a través de una secuencia de semáforos que se enciende y se apaga con una frecuencia específica. Además se obtuvo la normalización del modelo suave a trozos Ec.(2-5). También se muestra el diagrama de transición de estados Fig.(2-4) utilizado para simular el sistema. Esta simulación se desarrolló utilizando una de las principales estrategias para integración numérica de soluciones de sistemas suaves a trozos que es bajo un esquema basado en eventos e implementado en Matlab.

En el capítulo 3, (*Análisis de simulaciones numéricas*), se realizó la descripción y la comparación de cuatro modelos, los cuales fueron obtenidos al variar los parámetros del sistema Ec.(2-1) que describe la dinámica de un solo vehículo y la función (2-3) que modela el semáforo:

1. **Modelo I:** describe la dinámica de un sólo vehículo que viaja sobre una vía, donde la distancia entre semáforos es fija $L_n = L$. Además los semáforos tienen la misma frecuencia de cambio, es decir, $\omega_n = \omega$, el mismo ciclo $T_n = T$ y un desfase nulo, $\varphi_n = 0$.
2. **Modelo II:** en este modelo modifíco el parámetro L_n ; es decir, se considerará la distancia entre semáforos consecutivos diferente. Además la función que modela el semáforo tendrá un desfase nulo y el ciclo T_n del n -ésimo semáforo será diferente, dado que este parámetro depende de la distancia de cada tramo como lo ilustra la Ec. (2-7).
3. **Modelo III:** para este modelo se considerará distancias fijas entre semáforos consecutivos; es decir $L_n = L$ y el desfase φ_n de la señal de cada semáforo será diferente de cero, además el ciclo del semáforo será igual para todos, $T_n = T$.
4. **Modelo IV:** este modelo es el más próximo a la realidad porque se supone que las distancias entre semáforos consecutivos son diferentes, el desfase de la señal del semáforo, $\varphi \neq 0$ y el ciclo de cada semáforo T_n será diferente como lo indica la Ec. (2-7).

Además se efectuó un estudio numérico a cada modelo y se realizaron los respectivos diagramas de bifurcaciones variando el ciclo normalizado del semáforo. En estos diagramas se aprecian fenómenos suaves y no suaves debido a la naturaleza no suave del sistema.

En el capítulo 4, *Estabilidad*, se realizó un análisis de estabilidad para la órbita 1T-periódica y 2T-periódica del Modelo I, descrito anteriormente.

En el capítulo 5 se realizó una aproximación del consumo de combustible del Modelo I, donde se considera un sólo vehículo que viaja sobre una vía que tiene n semáforos los cuales conmutan al mismo tiempo y están separados por una distancia fija entre ellos. El cálculo de combustible se realizó para la órbita 1T-periódica, 2T-periódica y la ola verde de este modelo.

Finalmente, en el capítulo 6 se incluyen las conclusiones de este proyecto de investigación. En los anexos se realiza una breve revisión de la teoría de control especialmente del *Principio del máximo de Pontryagin* y de **la condición necesaria de primer orden** en el Cálculo de Variaciones que es conocida como la ecuación diferencial de *Euler-Lagrange*, permite solucionar algunos problemas de optimización.

Por último, se propone algunos trabajos futuros relacionados con las teorías dadas y otros que pueden ser solucionados con otras herramientas.

2. Modelo matemático para un solo vehículo

Las grandes ciudades del mundo presentan muchas dificultades y entre ellas se puede destacar el flujo vehicular que la mayoría de veces no está sincronizado y produce un caos general; esto da la sensación de un tráfico congestionado casi a toda hora. La comisión de comunidades europeas, en su publicación El libro Verde [21], sobre el impacto del transporte en el medio ambiente, define la congestión como un fenómeno temporal del carácter recurrente y de duración variable, debido al desequilibrio entre la oferta, la demanda y la capacidad de infraestructura y de transporte, es decir, la congestión se produce en un lugar y en un momento determinado, en los cuales la demanda del tráfico excede a la capacidad de las vías.

Cuando un área urbana tiene una gran congestión vehicular, disminuye las condiciones favorables de vida en general de sus ciudadanos y produce una serie de efectos negativos como:

- Pérdida del tiempo de los automovilistas y pasajeros, lo que se traduce en coste de oportunidad, aumentando actividad no productiva para la mayoría de la gente.
- Retrasos, lo cual puede resultar en la hora atrasada de llegada al empleo, a las reuniones, y las actividades educativas, lo que al final resulta en pérdida de negocios, medidas disciplinarias u otras pérdidas personales.
- Incapacidad para predecir con exactitud el tiempo de viaje, lo que lleva a los conductores la asignación de más tiempo para viajar, y destinación de menos tiempo para actividades productivas.
- Desperdicio de combustible que aumenta la contaminación en el aire y las emisiones de dióxido de carbono, que puede contribuir al cambio climático, debido al aumento de aceleración y frenado de los vehículos.
- El desgaste de los vehículos como consecuencia de aceleración y frenado, lo que hace más frecuente la necesidad de reparaciones y reemplazos.
- El estrés de las personas por la congestión vehicular.

2.1. Descripción del modelo

Para realizar esta investigación y comprender el comportamiento complejo de interacción entre varios vehículos, es necesario conocer la dinámica de un solo vehículo. Por este motivo se hace uso del modelo microscópico unidimensional de tráfico vehicular de Toledo [66]. Este modelo ideal es con base al comportamiento cinemático de un único vehículo que viaja a través de una secuencia de n semáforos, los cuales presentan dos estados (rojo y verde) y están separados entre sí una distancia L_n .

El modelo unidimensional de Toledo [66], supone que un automóvil viaja sobre una trayectoria recta con una aceleración constante que tiene una secuencia de semáforos como se observa en la Fig.(2-1). Además el vehículo cumple con las condiciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Luego, bajo los supuestos anteriores un automóvil durante un trayecto de viaje puede presentar uno o varios de los siguientes comportamientos:

- Aceleración positiva a_+ hasta que el vehículo alcance la velocidad de cruce o velocidad máxima v_{max} .
- Velocidad constante v_{max} , cuando la aceleración es cero.
- Desaceleración $-a_-$ hasta que el vehículo se detiene.

Ampliando la descripción presentada por Toledo [66], se describen dos estados más, como sigue:

- Detenido en el semáforo, cuando éste se encuentre en rojo.
- Desaceleración $-a_-$ sin detenerse **y acelerar de nuevo**.

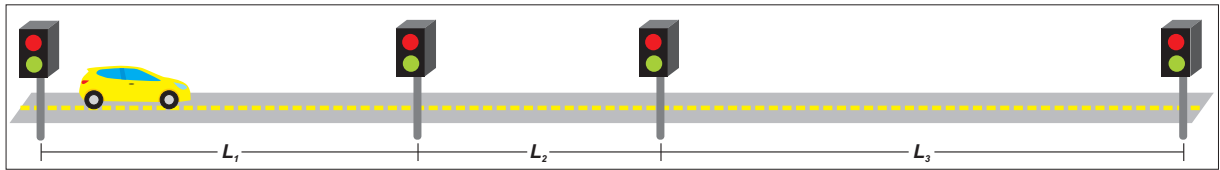


Figura 2-1.: Secuencia de semáforos

Es de notar que v_{max} , a_+ y a_- son positivas. a_+ y a_- son utilizados para denotar los estados de aceleración y desaceleración, respectivamente, donde $a_+ \neq a_-$. además $v(t)$ representa la velocidad del vehículo en el tiempo t .

Bajo estas condiciones, la dinámica para el automóvil se representa por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} a_+ \Theta(v_{max} - v), & \text{si acelera} \\ -a_- \Theta(v), & \text{si desacelera} \\ 0, & \text{si } v = 0 \text{ ó } v = v_{max} \end{cases} \quad (2-1)$$

donde Θ es la *función de Heaviside*, la cual impide que la velocidad v del móvil sea superior a la máxima e inferior a cero.

$$\Theta(v) = \begin{cases} 0, & \text{si } v \leq 0 \\ 1, & \text{si } v > 0. \end{cases}$$

Para aclarar la afirmación anterior, primero se encuentra $\Theta(v_{max} - v)$, es decir,

$$\Theta(v_{max} - v) = \begin{cases} 0, & \text{si } v_{max} \leq v \\ 1, & \text{si } v_{max} > v. \end{cases}$$

luego, al utilizar la *función de Heaviside* en la Ec.(2-1), el sistema puede ser expresado así:

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{si acelera y } v_{max} \leq v \\ a_+ & \text{si acelera y } v_{max} > v \\ -a_- & \text{si desacelera y } v > 0 \\ 0 & \text{si desacelera y } v \leq 0 \end{cases} \quad (2-2)$$

Al observar la primera y última rama de la Ec.(2-2), se concluye que la *función de Heaviside*, permite asignar un valor nulo a $\frac{dv}{dt}$ cuando la velocidad v del móvil sea superior a la máxima e inferior a cero.

Respecto a los semáforos, Toledo [66] utiliza una función periódica para modelar su comportamiento, dado que un semáforo requiere de un período de tiempo para pasar de una luz a otra, además dicha función debe permitir diferenciar los dos estados considerados para el semáforo que son la *luz verde* y *luz roja*. Luego una función que cumple las dos características anteriores es:

$$f(t; \omega_n, \varphi_n) = \text{sen}(\omega_n t + \varphi_n) \quad (2-3)$$

para modelar los estados del n -ésimo semáforo (*luz verde* y *luz roja*) se considera las siguientes condiciones:

1. Si la función $f(t; \omega_n, \varphi_n) = \text{sen}(\omega_n t + \varphi_n) > 0$ entonces el semáforo se encontrará en verde.
2. Si $\text{sen}(\omega_n t + \varphi_n) \leq 0$ entonces el semáforo se encontrará en rojo.

donde

- $\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$: es la frecuencia de cambio del n -ésimo semáforo.
- T_n : es el ciclo del n -ésimo semáforo. Es decir, el tiempo que demora la luz verde en volver a ser verde.
- φ_n : es el desfase del n -ésimo semáforo, el cual permite que la serie de semáforos se coordinen de tal manera que se obtenga un flujo continuo del tráfico sobre la vía.

Estos parámetros serán utilizados para estudiar y determinar la influencia de los semáforos en la dinámica del vehículo.

2.1.1. Distancia de Seguridad

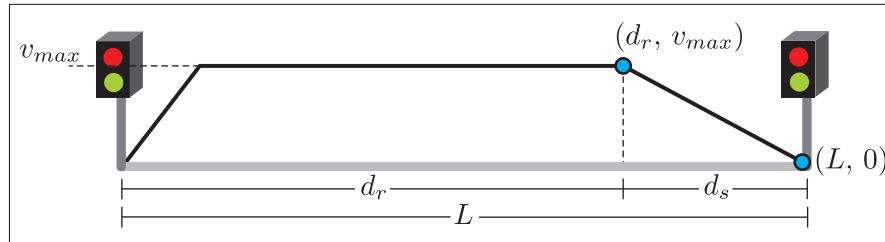


Figura 2-2.: Distancia de Seguridad

Cuando el vehículo se aproxime al n -ésimo semáforo con velocidad v , el conductor debe tomar la decisión de frenar o no, dependiendo de la señal del semáforo siguiente. Haciendo uso de la Fig. (2-2), se define la distancia de seguridad como $d_s = L - d_r$, la cual garantiza que cuando el conductor frena el auto llegue al semáforo con velocidad cero, donde L es la distancia entre dos semáforos y d_r es la distancia recorrida que lleva el vehículo hasta que decide frenar.

La distancia de seguridad o distancia de frenado, es aquella distancia que requiere un vehículo que viaja a una velocidad v para detenerse. Determinar la distancia de seguridad es necesario para optimizar la seguridad de los vehículos, el trazado de vías y el diseño de señalizaciones

[5].

Bajo las condiciones anteriores y por la Ec.(2-1), el móvil se desplaza sobre una trayectoria recta estando sometido a una aceleración o desaceleración ambas constantes. Luego, haciendo uso de una de las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA),

$$v_f^2 = 2a(x - x_0) + v_0^2$$

se tiene que la distancia de seguridad es dada por:

$$d_s = \frac{v_{max}^2}{2a_-}$$

Obsérvese el punto $P_1 = (d_r, v_{max})$, en la Fig.(2-2), significa que el vehículo lleva una velocidad máxima v_{max} cuando éste alcanza la posición d_r ; además el punto $P_2 = (L, 0)$ indica que el vehículo tiene una velocidad nula cuando se encuentra junto al semáforo el cual está ubicado en la posición L .

Haciendo uso de los puntos P_1 y P_2 se calcula la pendiente de la recta que pasa por ellos.

$$m = \frac{-v_{max}}{L - d_r} = \frac{-v_{max}}{d_s}.$$

luego, haciendo uso del punto $P_2 = (L, 0)$ y la pendiente m , la ecuación de dicha recta es:

$$v = m(d - L) \tag{2-4}$$

donde v y d son la velocidad y la distancia del automóvil respectivamente.

Con base en las ecuaciones del MRUA y utilizando la Fig (2-2) se encuentran dos condiciones:

- La primera para la velocidad crucero v_{max} .
- La segunda aplicada al ciclo del n -ésimo semáforo T_n .

Para determinar dichas condiciones, se llamará primera parte de la Fig (2-2) al segmento de recta con pendiente positiva a_+ , segunda parte al segmento de recta con pendiente nula y tercera al segmento de recta con pendiente negativa $-a_-$. Además en esta primera parte se considerará que el vehículo se encuentra en *estado acelerado*, dado que inicio su recorrido con una aceleración constante positiva a_+ hasta alcanzar la velocidad máxima v_{max} . Y para la tercera parte se considera que el vehículo se encuentra en *estado desacelerado* dado que el vehículo disminuyendo su velocidad hasta detenerse junto al semáforo.

Luego, utilizando una de las ecuaciones del MRUA

$$v_f^2 = 2a(x - x_0) + v_0^2$$

para cada una de las situaciones anteriores se tiene:

- La distancia recorrida durante el *estado acelerado* es $\frac{v_{max}^2}{2a_+}$
- De igual manera, para el *estado desacelerado*, la distancia recorrida es $\frac{v_{max}^2}{2a_-}$

Luego, con el fin de que el vehículo alcance la velocidad máxima o crucero antes del punto de seguridad $P_1 = (d_r, v_{max})$, debe cumplirse que la distancia recorrida en el estado acelerado más la distancia recorrida el estado desacelerado debe ser menor o igual a la distancia entre dos semáforos consecutivos, es decir:

$$\frac{v_{max}^2}{2a_+} + \frac{v_{max}^2}{2a_-} < L$$

Además con el propósito de que el semáforo no permute tan rápido, es decir, que no cambie de rojo a verde innecesariamente, debe encontrarse el tiempo transcurrido en el estado acelerado y en el estado desacelerado. De manera similar que la anterior se hace uso de otra de las ecuaciones del MRUA

$$v_f = at + v_0$$

y se encuentra los tiempos correspondientes para cada estado:

- $\frac{v_{max}}{a_+}$: es el tiempo que transcurre en el estado acelerado.
- $\frac{v_{max}}{a_-}$: es el tiempo que el vehículo viaja durante el estado desacelerado.

Luego, el ciclo del n -ésimo semáforo T_n debe cumplir la siguiente condición:

$$T_n > \max \left(\frac{v_{max}}{a_+}, \frac{v_{max}}{a_-} \right).$$

2.2. Normalización del modelo

Para facilitar la comprensión del comportamiento de un vehículo que viaja a través de una secuencia de n semáforos se realizará una normalización del modelo de la sección anterior y, de esta manera se facilitarán los cálculos, dado que se reducen parámetros y se eliminan las unidades del sistema.

Para encontrar una versión normalizada del modelo presentado en la Ec.(2-1), se definen las variables normalizadas como se muestra en la Tabla.(2-1)

Tabla 2-1.: Variables Normalizadas

Velocidad	$u = \frac{v}{v_{\text{máx}}}$
Distancia	$y = \frac{d}{L}$
Tiempo	$\tau = \frac{t}{T_c}$
Tiempo crucero	$T_c = \frac{L_n}{v_{\text{máx}}}$

Ahora, haciendo uso de las nuevas variables normalizadas presentadas en la Tabla (2-1) se obtiene el modelo normalizado que se muestra en la Ec.(2-5).

$$\frac{du}{d\tau} = \begin{cases} A_+ \Theta(1 - u), & \text{si acelera} \\ -A_- \Theta(u), & \text{si desacelera} \\ 0, & \text{si } u \text{ es nula o máxima} \end{cases} \quad (2-5)$$

Donde Θ es la función de Heaviside y los nuevos parámetros adimensionales se definen así:

$$A_+ = \frac{a_+ L}{v_{\text{máx}}^2}, \quad A_- = \frac{a_- L}{v_{\text{máx}}^2}. \quad (2-6)$$

Lo anterior es la normalización de las ecuaciones que describen el comportamiento del vehículo, por lo tanto es necesario normalizar las condiciones que describen al semáforo. Para realizar dicha normalización se utiliza la Tabla(2-1) y se define un nuevo parámetro llamado ciclo normalizado del n -ésimo semáforo así:

$$T_{sn} = \omega_n T_c.$$

Luego, el n -ésimo semáforo cumple las siguientes condiciones:

1. Se encontrará en verde, si la función $\text{sen}(T_{sn}\tau + \varphi_n) > 0$.
2. Se encontrará en rojo, si $\text{sen}(T_{sn}\tau + \varphi_n) \leq 0$.

Utilizando el ciclo normalizado del n -ésimo semáforo $T_{sn} = \omega_n T_c$ y $\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$, donde T_n es el ciclo del n -ésimo semáforo. Es importante, resaltar la importancia de la ecuación:

$$T_n = \frac{2\pi L_n}{T_{sn} v_{max}} \quad (2-7)$$

la cual permitirá obtener el ciclo del n -ésimo semáforo en unidades de tiempo.

De igual manera que se realizó la normalización de la Ec.(2-1), es necesario normalizar las condiciones sobre la velocidad máxima o cruce y el ciclo del semáforo de la sección anterior, entonces se tiene que:

1. Si $\frac{v_{max}^2}{2a_+} + \frac{v_{max}^2}{2a_-} < L$ donde $\frac{v_{max}^2}{2a_+} = \frac{L}{2A_+}$ y $\frac{v_{max}^2}{2a_-} = \frac{L}{2A_-}$ entonces $\frac{1}{A_+} + \frac{1}{A_-} < 2$.
2. Si $T_n > \max(\frac{v_{max}}{a_+}, \frac{v_{max}}{a_-})$ donde $\frac{v_{max}}{a_+} = \frac{L}{A_+ v_{max}}$ y $\frac{v_{max}}{a_-} = \frac{L}{A_- v_{max}}$ entonces $T_{sn} > \max(\frac{1}{A_+}, \frac{1}{A_-})$.

Por lo tanto, al cumplirse las desigualdades anteriores se tiene que el automóvil alcanzará la velocidad máxima $u = 1$ antes del punto de seguridad y los semáforos no conmutarán tan rápido.

También es importante encontrar la normalización de la ecuación (2-4)

$$v = m(d - L)$$

donde v y d son la velocidad y la distancia del automóvil respectivamente, usando las nuevas variables normalizadas se tiene que:

$$u = -\frac{2a_- L}{v_{max}^2}(y - 1)$$

utilizando el parámetro A_- , dado en la Ec.(2-6), entonces la ecuación de la recta normalizada es:

$$u = -2A_-(y - 1) \quad (2-8)$$

donde u y y son la velocidad y la distancia del automóvil normalizadas respectivamente.

Con el objetivo de ilustrar lo expuesto anteriormente, se muestra la Fig.(**2-3**), que representa la dinámica de un automóvil viajando a través de una secuencia de tres semáforos equidistantes los cuales conmutan al mismo tiempo.

En la Fig.(**2-3**), se muestra la velocidad normalizada del vehículo en línea continua gruesa, la posición normalizada en línea discontinua y la señal del semáforo $sen(T_s \tau)$ en línea continua delgada, donde $\varphi_n = 0$, la fase $\omega_n = \omega$. Por lo tanto el ciclo del semáforo normalizado

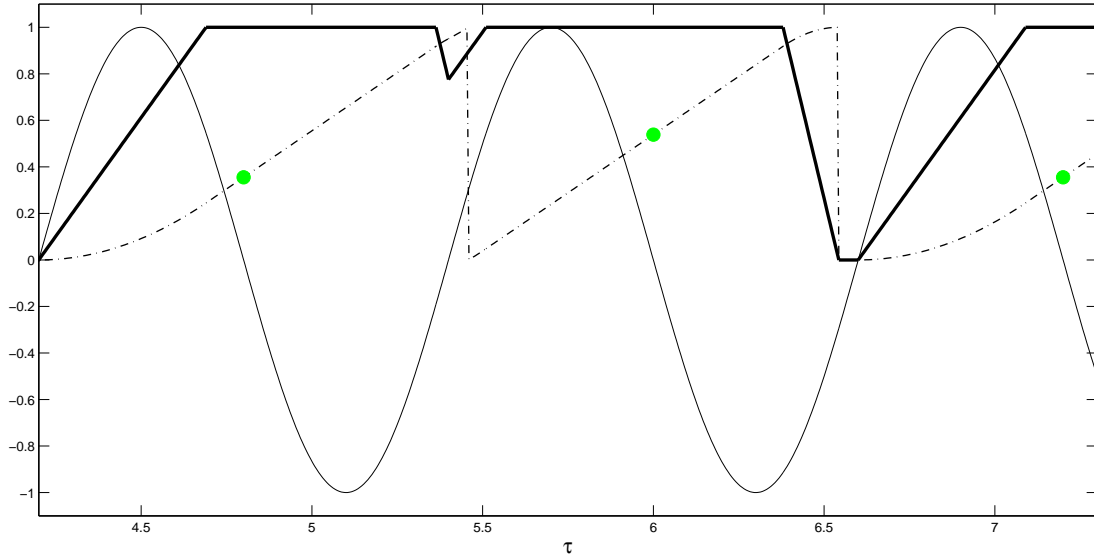


Figura 2-3.: Diagrama de Referencia del modelo (2-5)

es $T_{sn} = T_s = 1,2$; lo cual indica, que el ciclo normalizado es el mismo para los tres semáforos.

Bajo las condiciones anteriores, el vehículo inicia su recorrido con posición normalizada $y = 0$ y velocidad normalizada $u = 0$. El vehículo tiene una aceleración constante positiva hasta alcanzar la velocidad máxima permitida $u = 1$, como lo muestra la línea continua gruesa. Es importante aclarar que la posición normalizada, línea discontinua aumenta su valor hasta alcanzar el valor máximo $y = 1$ el cual indica que el vehículo ha llegado al siguiente semáforo. Por esta razón, ésta tiene un reseteo como se observa en la Fig(2-3). Esto ocurre debido a la normalización de la variable.

Después de que el vehículo alcanza la velocidad máxima $u = 1$, permitida en la vía se mantiene en ella, hasta que entre a la zona de seguridad o distancia de seguridad y a su vez el semáforo al que se está aproximando encuentre en rojo, por eso debe frenar y la velocidad normalizada disminuye.

Lo anterior, se observa en la Fig(2-3) cuando la función seno toma valores negativos como lo indica la línea delgada. El conductor se ve obligado a desacelerar, reduciendo su velocidad, como lo muestra la línea continua gruesa. Pero debe acelerar de nuevo dado que la señal del semáforo cambió a verde, dado que la función seno es positiva y, por esta razón el conductor debe incrementar la velocidad hasta alcanzar el valor máximo permitido.

Nuevamente, el vehículo continúa su viaje pero se ve forzado otra vez a disminuir la velocidad hasta detenerse ya que el segundo semáforo se encuentra en rojo y el automóvil llega a

la distancia de seguridad. El carro permanece durante cierto tiempo con velocidad cero, esto lo confirma la línea discontinua dado que la posición es nula durante el tiempo de espera. Cuando la señal del semáforo pasa a verde, es decir, la función seno está en el semiciclo positivo el vehículo inicia nuevamente su recorrido.

Finalmente, se resalta el círculo sobre la línea discontinua que indica la posición del vehículo en el instante que el semáforo cambia de verde a rojo. Conocer esta posición es fundamental dado que el vehículo no puede cruzar el semáforo. Además esta información es importante ya que con ella se construirán los diagramas de bifurcación.

2.3. Descripción del modelo suave a trozos para un sólo vehículo

En sistemas suaves a trozos la interacción de conjuntos invariantes con las fronteras de cambio, con frecuencia producen bifurcaciones que en ningún caso aparecen en los sistemas suaves. Estas son conocidas como bifurcaciones inducidas por discontinuidad. Mientras que las cascadas de doblamiento de período son comunes en sistemas suaves, en los sistemas suaves a trozos las órbitas periódicas pueden experimentar lo que se denominan secuencias de adición de periodo o de transición directamente al caos. [75]

Es importante resaltar que la dinámica del sistema se puede representar utilizando un sistema suave a trozos. En este modelo se presentan tres eventos o estados, los cuales dependen de la aceleración; y serán llamados así:

- Estado acelerado.
- Estado nulo.
- Estado desacelerado.

Para realizar una descripción adecuada de cada evento, partiendo de la Ec.(2-5), se realiza un cambio de variable, representando el sistema en variables de estado $x_1 = y$, y $x_2 = u$ donde y y u son la posición y la velocidad normalizadas del vehículo respectivamente en un tiempo normalizado τ .

De esta manera se define el siguiente sistema, que va a cambiar dependiendo de que condiciones se cumplan.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = A \end{cases} \quad (2-9)$$

donde x_1 y x_2 son la distancia y velocidad del vehículo respectivamente, además $X = (x_1, x_2)$, es el vector de estados. El parámetro A se encontrará en términos de la aceleración, como lo indica la Ec.(2-6), la cual cambiará dependiendo en qué estado se encuentre el vehículo. Haciendo uso del sistema (2-9), se tiene que cada estado dinámico puede expresarse de la siguiente manera:

Estado acelerado

Este estado ocurre cuando el conductor aumenta la velocidad del vehículo de forma constante; es decir, el automóvil tiene una aceleración constante y positiva hasta que alcanza la velocidad de cruce permitida sobre la vía. De esta manera el sistema queda como sigue:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = A_+ \Theta(1 - x_2) \end{cases} \quad (2-10)$$

Estado nulo

Durante el recorrido de una vía un automóvil puede presentar en dos situaciones diferentes una aceleración nula, entonces el estado nulo se divide en dos modos.

1. Ocurre cuando el vehículo alcanza la velocidad máxima permitida en la vía. Por esta razón se debe mantener en esta velocidad; es decir, que su aceleración es nula. Luego el sistema de ecuaciones queda determinado así:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (2-11)$$

2. Cuando el vehículo se encuentra en reposo en la posición de un semáforo, esperando a que éste cambie a verde. Bajo estas condiciones se tiene que el sistema de ecuaciones asociado es:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (2-12)$$

Estado desacelerado

Cuando la evolución del sistema esté en modo desacelerado, es porque el vehículo se ve forzado a disminuir su velocidad de forma constante, debido a que el semáforo se encuentra en

rojo. Es decir, el vehículo presenta una aceleración constante negativa. Luego las ecuaciones asociadas a éste estado son:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -A_- \Theta(x_2) \end{cases} \quad (2-13)$$

2.4. Esquema numérico

Las principales estrategias para la integración numérica de soluciones de sistemas suaves a trozos son los esquemas basados en eventos [69] y los de paso de tiempo fijo. El primero se basa en una formulación híbrida, mientras que el segundo se inspira en la solución de problemas con variables complementarias. Para el esquema basado en eventos, bajo el cual se realiza la integración numérica para este caso de estudio, se tienen tres modos dinámicos: estado acelerado, nulo y desacelerado.

A continuación se muestra la descripción del algoritmo y las condiciones necesarias que se tienen en cuenta para simular los sistemas Ec.(2-10)-(2-13). Con ayuda de la Fig.(2-4) se obtiene una descripción del Diagrama de Transición de Estados **DTE**, donde cada estado se denota como en la Tabla (2-2).

Tabla 2-2.: Estados

Estado de Transición	Notación
Estado inicial	S_i
Estado nulo	S_o
Estado acelerado	S_+
Estado desacelerado	S_-
Condición no válida	Non valid

Para realizar la descripción del algoritmo, lo primero que se considera son las condiciones iniciales C_{io} , C_{i+} , C_{i-} , las cuales se encontrarán usando la Ec.2-8,

$$u = -2A_-(y - 1)$$

Estas condiciones permiten seleccionar el estado siguiente al estado inicial S_i .

- Si se satisface que $x_2 - 1 = 0$ y $1 - y - \frac{1}{2A_-} > 0$, se cumple la condición C_{io} , luego el estado cambia a S_o .

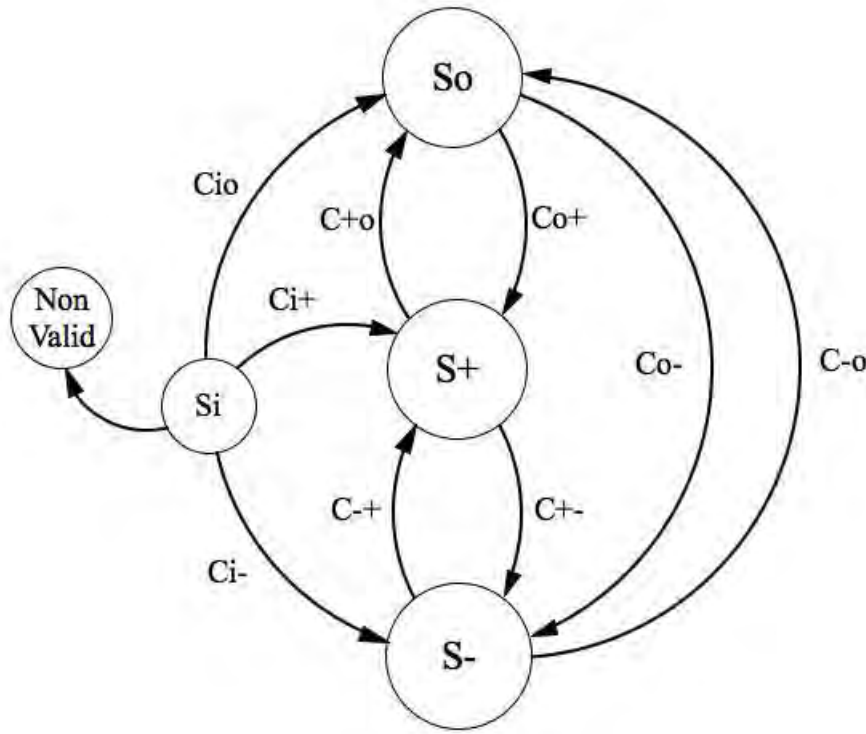


Figura 2-4.: Diagrama de Transición de Estados.

- Si $1 - x_2 > 0$ y $-2A_-x_1 - x_2 + 2A_- > 0$, entonces se satisface C_{i+} , por lo tanto el estado siguiente sería S_+ .
- Si se cumple que $-2A_-x_1 - x_2 + 2A_- = 0$, entonces el estado cambia a S_- .
- Si $x_2 - 1 < 0$, entonces el estado pasa a condición no valida.

Cuando el sistema está en S_o las condiciones para cambiar a otro estado son:

- Si $x_2 = 0$ y $\text{sen}(T_{ns}\tau + \varphi_n) > 0$, entonces se satisface C_{o+} y el estado siguiente es S_+ .
- Si $-2A_-x_1 - x_2 + 2A_- = 0$ y $\text{sen}(T_{ns}\tau + \varphi_n) \leq 0$, entonces se cumple C_{o-} y el estado cambia a S_- .

Cuando el sistema está en S_+ las condiciones para cambiar a otro estado son:

- Si se satisface que $x_2 - 1 = 0$, entonces se cumple C_{+o} y el estado cambia a S_o .
- Si $-2A_-x_1 - x_2 + 2A_- = 0$ y $\text{sen}(T_{ns}\tau + \varphi_n) \leq 0$, entonces se cumple C_{+-} y el estado cambia a S_- .

Cuando el sistema está en S_- las condiciones para cambiar a otro estado son:

- Si $x_2 = 0$ y $\text{sen}(T_{ns}\tau + \varphi_n) \leq 0$, entonces se satisface C_{-o} y el estado siguiente es S_o .
- Si $-2A_-x_1 - x_2 + 2A_- = 0$ y $\text{sen}(T_{ns}\tau + \varphi_n) > 0$, entonces se satisface C_{-+} y el estado siguiente es S_+ .

2.5. Simulaciones numéricas

Con base en los trabajos de Toledo [66] y Villalobos [72], el primer propósito de esta sección, es comprender el comportamiento de un vehículo cuando se considera que todos los semáforos presentan distancias fijas, y tienen la misma frecuencia de cambio con un desfase nulo; es decir, $L_n = L$, $\varphi = 0$, $\omega_n = \omega$, $T_n = T$ de esta manera el ciclo normalizado $T_{ns} = T_s$ es el mismo para todos los n semáforos.

En esta sección se mostrarán una serie de simulaciones numéricas del modelo suave a trozos (2-5). Con el propósito de describir y entender la dinámica de un vehículo, se iniciará este análisis variando el ciclo del semáforo normalizado T_s , y los demás parámetros serán fijos, los cuales fueron tomados de fuentes secundarias [73] y se muestran en la Tabla.(2-3).

Tabla 2-3.: Parámetros del Modelo

Frecuencia de cambio	$w = \frac{2\pi}{T}$
Desfase	$\varphi_n = 0$
Distancia entre semáforos	$L = 200m$
Velocidad máxima	$v_{\text{máx}} = 14m/s$
Aceleración positiva	$a_+ = 2m/s^2$
Aceleración negativa	$a_- = 6m/s^2$

De la Ec.(2-6) y usando los valores de la Tabla .(2-3) se tiene que:

$$A_+ = \frac{2m}{s^2} \times \frac{200m}{(14m/s)^2} = \frac{100}{49}$$

$$A_- = \frac{6m}{s^2} \times \frac{200m}{(14m/s)^2} = \frac{300}{49}$$

2.5.1. Diagrama de bifurcación

Una bifurcación es un cambio de tipo topológico del sistema dinámico, el cual ocurre a medida que un parámetro cambia [40].

Un diagrama de bifurcación es una representación gráfica que permite determinar la relación entre parámetros del sistema y el tipo de soluciones que puede presentar dicho sistema [40]. Por esta razón es importante que en esta investigación se aborde este tipo de representaciones gráficas, dado que ellas permitirán explicar la dinámica no trivial y caótica que se presenta en el sistema de tráfico vehicular de estudio.

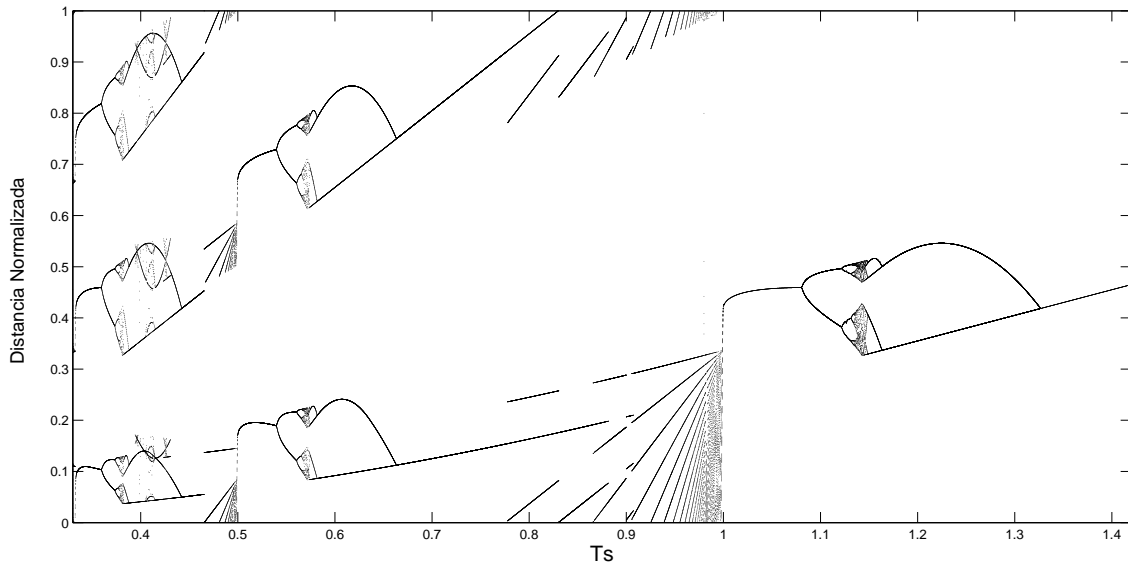


Figura 2-5.: Diagrama de Bifurcación

Para realizar el diagrama de bifurcación Fig.(2-5), se utilizó el modelo ec.(2-5). Éste se construyó variando el ciclo normalizado del semáforo, $T_{sn} = T_s$, la igualdad ilustra que este parámetro será el mismo para todos los semáforos, éste se grafica a lo largo del eje horizontal y, en el eje vertical, se muestra la posición normalizada del automóvil.

En este diagrama de bifurcación se observan diferentes fenómenos, que indican la riqueza dinámica del sistema; tales como fractalidad, períodos múltiples, doblamientos de período, caos, entre otros.

En la Fig.(2-5), cuando el ciclo normalizado del semáforo T_s toma valores en el intervalo $[0.7, 1.0]$ se observan unas líneas que se van acumulando a medida que T_s se acerca al valor de uno, de esta manera se observan órbitas con múltiples períodos. Luego, cuando $T_s > 1.0$ aparece una órbita de período uno y a medida que T_s se va incrementando se presenta un

doblamiento de período hacia el caos, donde éste comportamiento caótico es truncado y aparece nuevamente una órbita de período dos y finalmente una órbita de período uno.

Es importante resaltar también que en la Fig.(2-5) se observa bifurcaciones suaves y no suaves. Por ejemplo cuando $1.0 < T_s < 1.1$ se tiene una bifurcación suave y cuando $1.3 < T_s < 1.4$ se observa una bifurcación no suave.

2.5.2. Evolución en el tiempo

Antes de observar las gráficas de la evolución en el tiempo de las variables de estado, es importante resaltar la siguiente tabla (2-4), dado que relaciona los parámetros ciclo normalizado T_s con el ciclo T_n y el tiempo en verde de un semáforo. Recuérdese que las distancias entre semáforos consecutivos es la misma, es decir, $L_n = L$. Luego por la Ec.(2-7)

$$T_n = \frac{2\pi L_n}{T_s v_{max}}$$

se tiene que el ciclo de todos los semáforos de la secuencia es la misma. Además de la función (2-3) que modela el semáforo se tiene que el semiciclo positivo es igual al semiciclo negativo, por lo tanto, el tiempo en verde es igual al tiempo en rojo.

Tabla 2-4.: Ciclos

Ciclo normalizado	Ciclo del semáforo (seg)	Tiempo en verde (seg)
0.05	1795.15	897.57
0.1	897.576	448.78
0.2	448.788	224.39
0.5	179.515	89.75
0.9	99.7306	49.86
1.0	89.776	44.88
1.2	74.798	37.39
1.4	64.112	32.05

Al observar la Tabla (2-4), cuando T_s es cercano a cero el tiempo en verde del semáforo es grande. Ejemplo, para $T_s = 0.05$ el tiempo en verde es de casi 15 minutos lo cual no tendría

sentido configurar un semáforo con un ciclo $T_n = 30min$. Por tanto, se analizaran las órbitas para $T_s = 1.4$, $T_s = 1.2$ y valores alrededor de $T_s = 1.0$.

En la Fig.(2-6) se encuentra el retrato de fase de la velocidad normalizada vs la distancia normalizada del automóvil, cuando el ciclo normalizado del semáforo es $T_s = 1.4$. La interpretación de este retrato de fase debe hacerse en contra de las manecillas del reloj, donde la velocidad normalizada del vehículo se grafica a lo largo del eje horizontal y, la distancia normalizada, en el eje vertical.

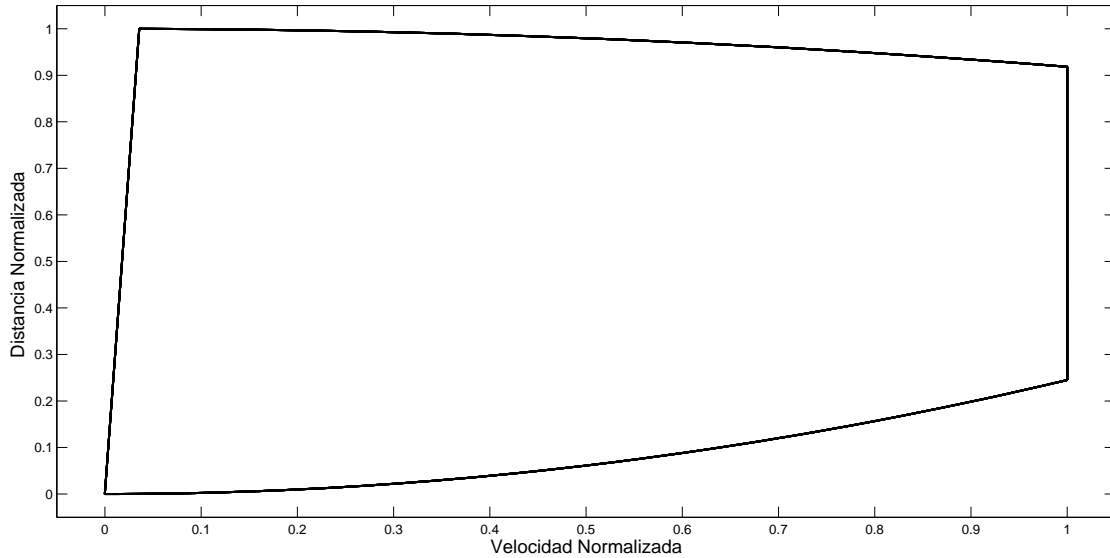


Figura 2-6.: Retrato de Fase. Para $T_s = 1.4$

La Fig.(2-7) muestra la evolución en el tiempo de las variables de estado donde la velocidad normalizada se representa con la línea continua gruesa, la posición normalizada con la línea discontinua y la señal del semáforo con la línea continua delgada, además los círculos indican la posición del vehículo en el instante que el semáforo cambia de verde a rojo.

las Fig.(2-6) y Fig.(2-7), se obtuvieron para el ciclo normalizado $T_s = 1.4$, y usando la Ec.(2-7) se tiene que el ciclo de todos los semáforos es $T \approx 64.11s$, lo cual indica que el semáforo se encontrará 32.05s en verde y 32.05s en rojo.

Comparando el diagrama de bifurcación Fig.(2-5) con las Fig.(2-6,2-7), se tiene que para $T_s = 1.4$ se observa una órbita de período uno. Esto se puede verificar en la Fig.(2-7), con ayuda del círculo, el cual permite visualizar la posición normalizada del vehículo en el instante que el semáforo conmuta; es importante destacar, que la posición siempre es la misma

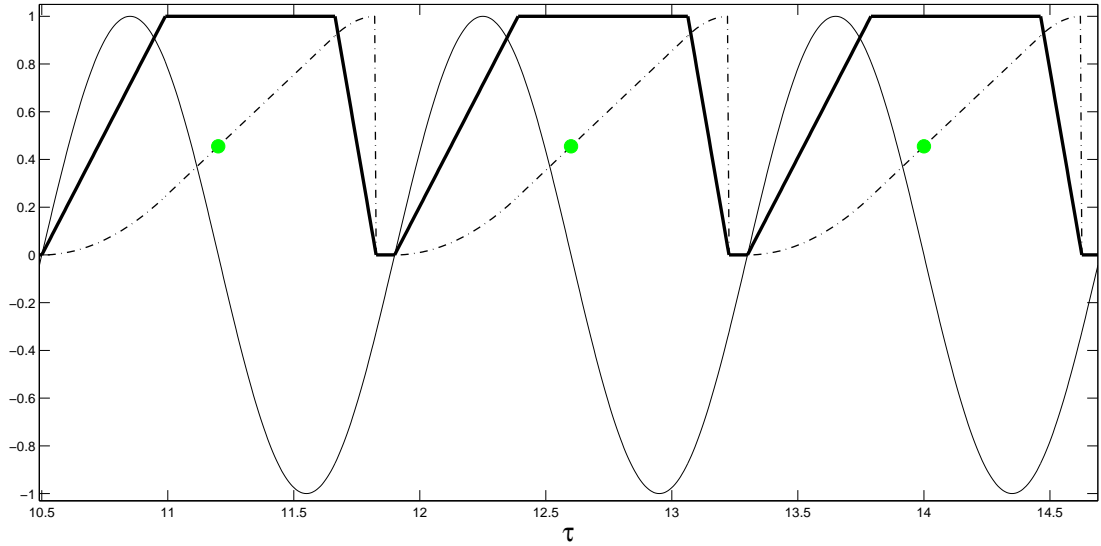


Figura 2-7.: Evolución en el Tiempo. Para $T_s = 1.4$

en cada tramo del recorrido y que el vehículo se detiene en cada semáforo dado a que ellos se encuentran en rojo como lo indica la función seno. Respecto al retrato de fase Fig.(2-6) se observa un ciclo límite, donde la trayectoria se cierra en el trayecto de viaje de un semáforo a otro.

Para entender un poco mejor lo expuesto anteriormente, se realizará un paralelo entre las Fig.(2-6) y Fig.(2-7). Primero que todo al ubicarse en la condición inicial $X_0 = (0, 0)$ del retrato de fase Fig.(2-6) se tiene que el vehículo se encuentra justo en el semáforo con velocidad normalizada $u = 0$ y posición normalizada $y = 0$. Luego, la posición normalizada se va incrementando a medida que la velocidad normalizada alcanza su valor máximo $u = 1$.

Un comportamiento similar se presenta en la Fig.(2-7), el vehículo se encuentra con velocidad normalizada $u = 0$ y posición normalizada $y = 0$. En el instante que el semáforo pasa a verde el auto inicia su recorrido. A medida que el tiempo se va incrementando, la velocidad y la posición lo hacen también, hasta alcanzar el valor máximo de la velocidad. Esta variable de estado permanece en este valor máximo durante determinado tiempo mientras la posición va aumentando. Éste último comportamiento se observa en el segmento de recta vertical del retrato de fase debido a que la coordenada en el eje horizontal permanece fija en $u = 1$.

Continuando con el recorrido en la Fig.(2-6), la velocidad normalizada empieza a disminuir mientras que la posición normalizada se aproxima a su valor máximo $y = 1$. Esto muestra que el vehículo se está acercando al semáforo siguiente, pero la velocidad decrece rápidamente.

te a cero, lo cual indica que ha llegado al semáforo y se encuentra en rojo.

En el esquema de evolución temporal se aprecia un comportamiento similar debido a que el vehículo disminuye su velocidad ya que la función seno es negativa y el auto se ve forzado a detenerse porque el semáforo permanece en rojo y por esa razón la posición decrece rápidamente del valor máximo al valor mínimo indicando que el vehículo se encuentra en la posición de un nuevo semáforo.

Lo anterior confirma la existencia de la órbita de periodo uno para el parámetro de bifurcación en $T_s = 1.4$ observada en el diagrama de bifurcación Fig.(2-5). Además, se confirmó en el retrato de fase Fig.(2-6) que la trayectoria se cierra en un solo período como lo ilustra la Fig.(2-7).

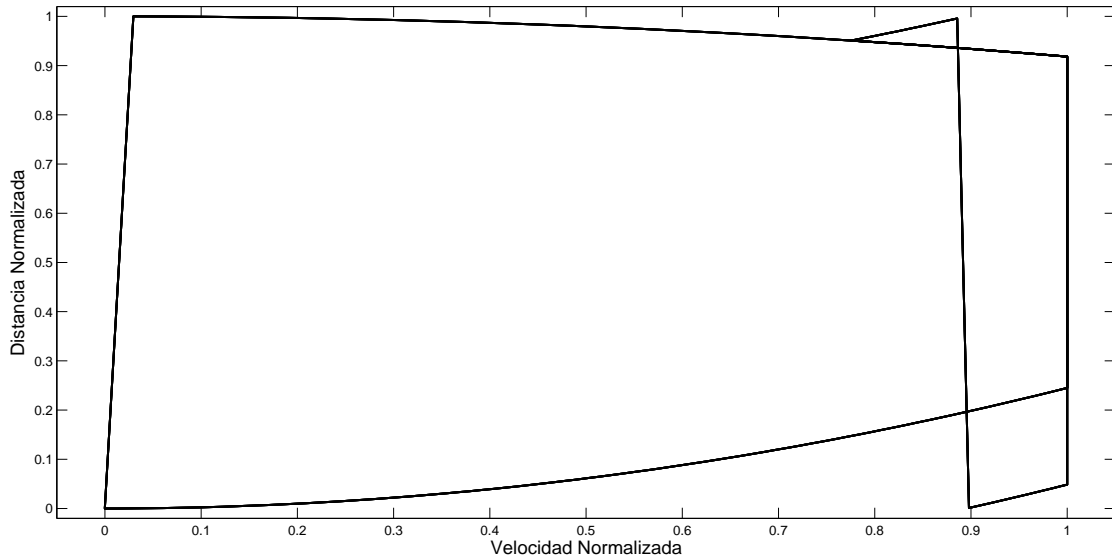


Figura 2-8.: Retrato de Fase. Para $T_s = 1.2$

De manera similar que al caso anterior, se hará una comparación entre el diagrama de bifurcación Fig.(2-5) y las Fig.(2-8,2-9), cuando el ciclo normalizado del semáforo toma el valor de $T_s = 1.2$, y usando la Ec.(2-7) se tiene que el ciclo de todos los semáforos es de $T \approx 74.798s$.

En la Fig.(2-5), cuando el ciclo normalizado del semáforo toma el valor de $T_s = 1.2$, se observa una órbita de período dos. En la Fig.(2-9), los círculos muestran la posición normalizada del vehículo en el instante en que el semáforo cambia de verde a rojo, y ésta coincide cada dos semáforos, además el vehículo se ve obligado a parar cada dos semáforos, todo esto es una evidencia de la existencia de la órbita de período dos.

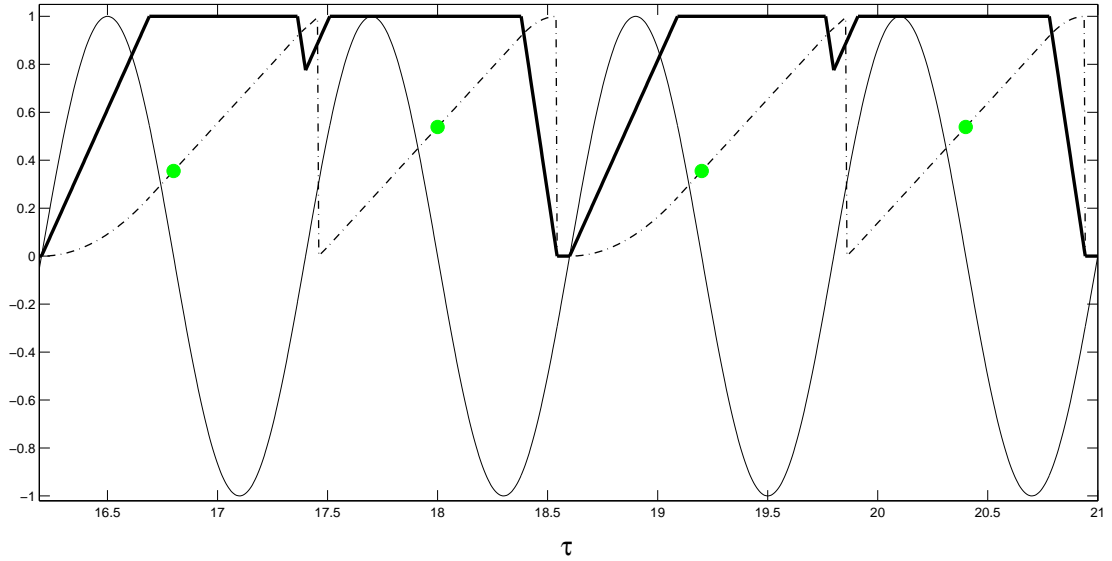


Figura 2-9.: Evolución en el Tiempo. Para $T_s = 1.2$

En la Fig.(2-9) se aprecia que el vehículo inicia su recorrido hasta alcanzar la velocidad máxima permitida como lo ilustra la línea continua gruesa, permanece en este estado durante un tiempo, después se ve forzado a disminuir la velocidad debido a que el semáforo está en rojo, y el automóvil está muy cerca al semáforo dado que la línea discontinua, la cual representa la posición, se está aproximando a su valor máximo. Pero este comportamiento es interrumpido debido a que el semáforo conmuta y por esa razón el conductor acelera de nuevo hasta alcanzar la velocidad máxima.

Un comportamiento similar ocurre al acercarse al siguiente semáforo pero aquí sí se ve forzado a detenerse, dado que el vehículo alcanzó el semáforo y éste continuaba en rojo. Al comparar el retrato de fase Fig.2-8 con la gráfica de evolución en el tiempo Fig.2-9, como se hizo en el caso anterior, se puede verificar que la órbita se cierra cuando el vehículo ha recorrido dos tramos del recorrido, recuerdesé que un tramo es el recorrido entre dos semáforos consecutivos.

Al observar las Fig.(2-10) hasta la Fig.(2-13), se aprecia el incremento del período de las órbitas a medida que el ciclo normalizado del semáforo T_s se aproxima a uno. Y se observa que entre más cercano sea T_s a uno el vehículo logra pasar más semáforos en verde con su velocidad máxima, permitiendo que el tiempo de viaje a través de la secuencia de semáforos sea menor.

Usando la Ec.(2-7) cuando el ciclo normalizado es $T_s = 1.0$, el ciclo del semáforo es aproxima-

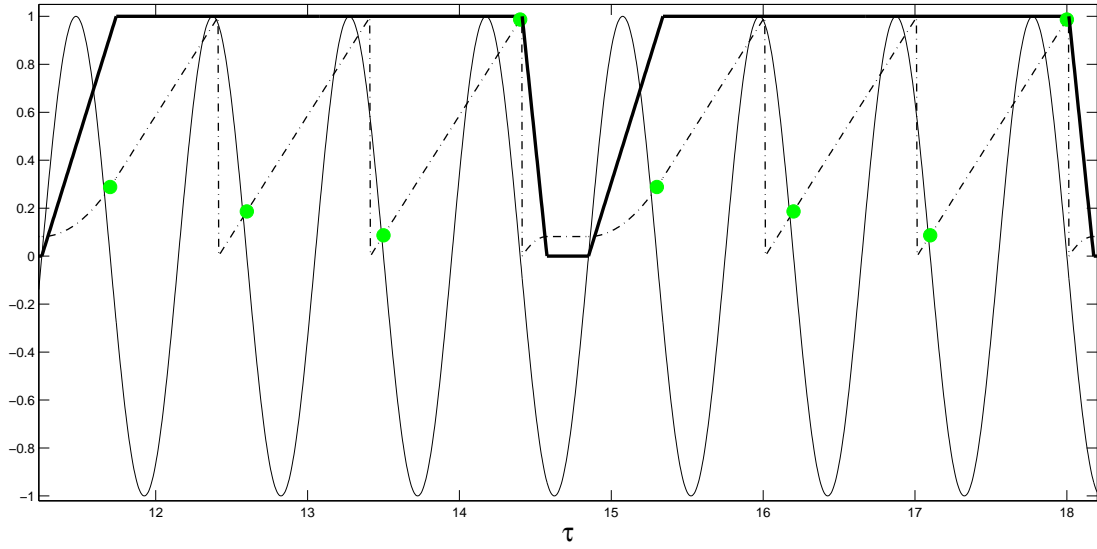


Figura 2-10.: Evolución en el Tiempo. Para $Ts = 0.9$

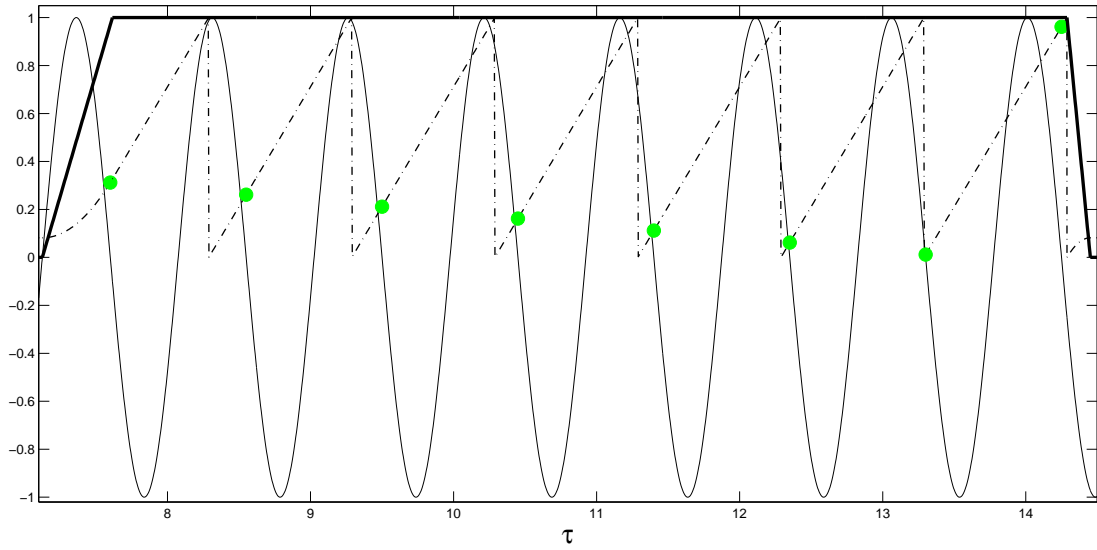


Figura 2-11.: Evolución en el Tiempo. Para $Ts = 0.95$

damente a $T \approx 89.75s$, de esta manera cada semáforo permanece en verde aproximadamente $44.875s$. En el retrato de fase Fig.(2-14) se observa un segmento de recta vertical, el cual indica que la velocidad normalizada permanece constante mientras la posición varía; es decir que el vehículo viaja a través de la vía con su máxima velocidad. Esto se puede confirmar en la Fig.(2-15), la línea continua gruesa permanece en su valor máximo; es decir, que el

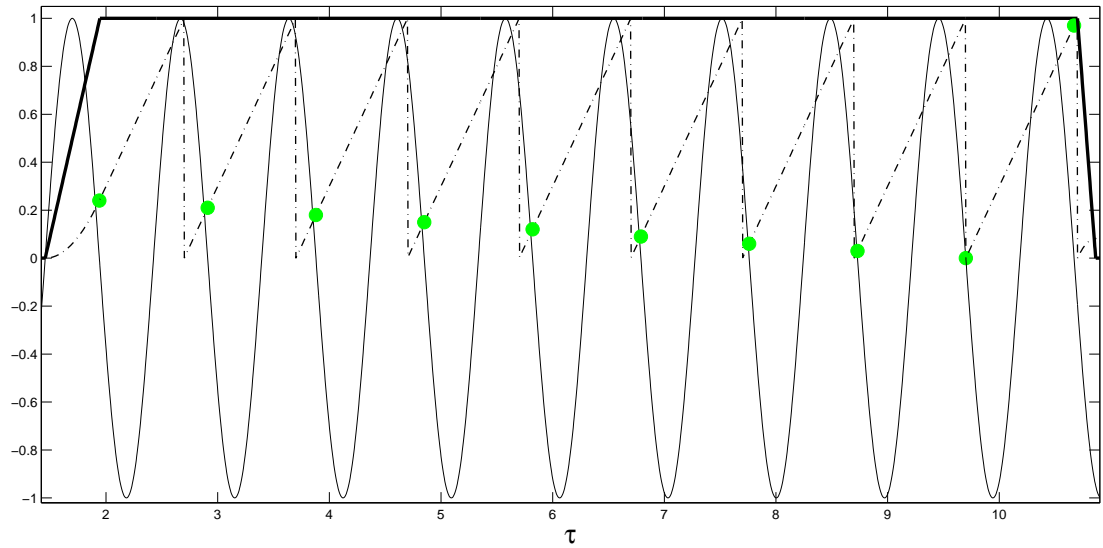


Figura 2-12.: Evolución en el Tiempo. Para $Ts = 0.97$

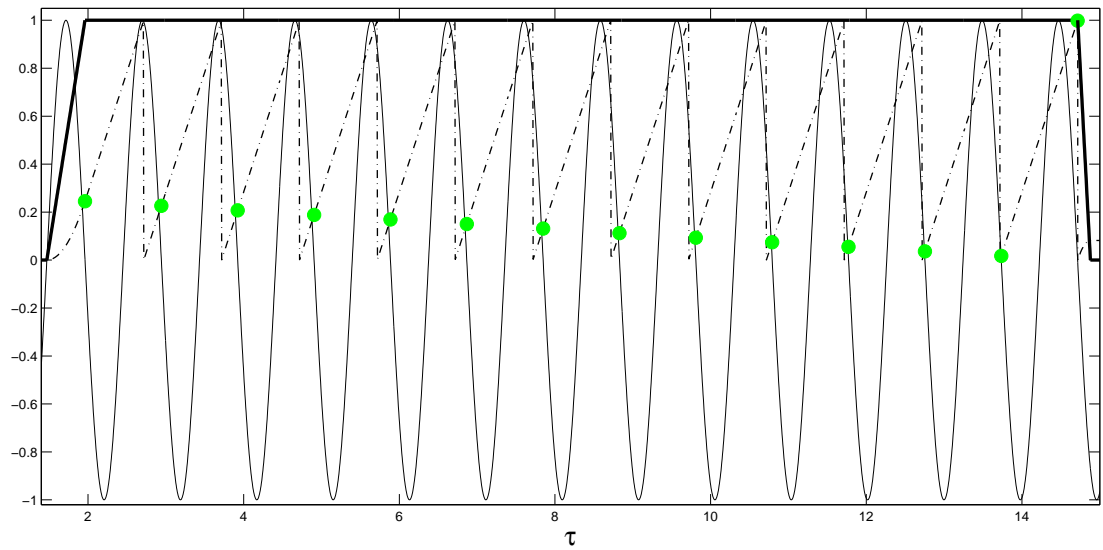


Figura 2-13.: Evolución en el Tiempo. Para $Ts = 0.981$

vehículo mantiene su velocidad máxima y logra cruzar todos los semáforos en verde, este comportamiento es conocido como ola verde.

Se definirá ola verde al efecto producido en una vía donde los semáforos están en un sincronismo tal que los vehículos que circulan por ella siempre encuentran luz verde.

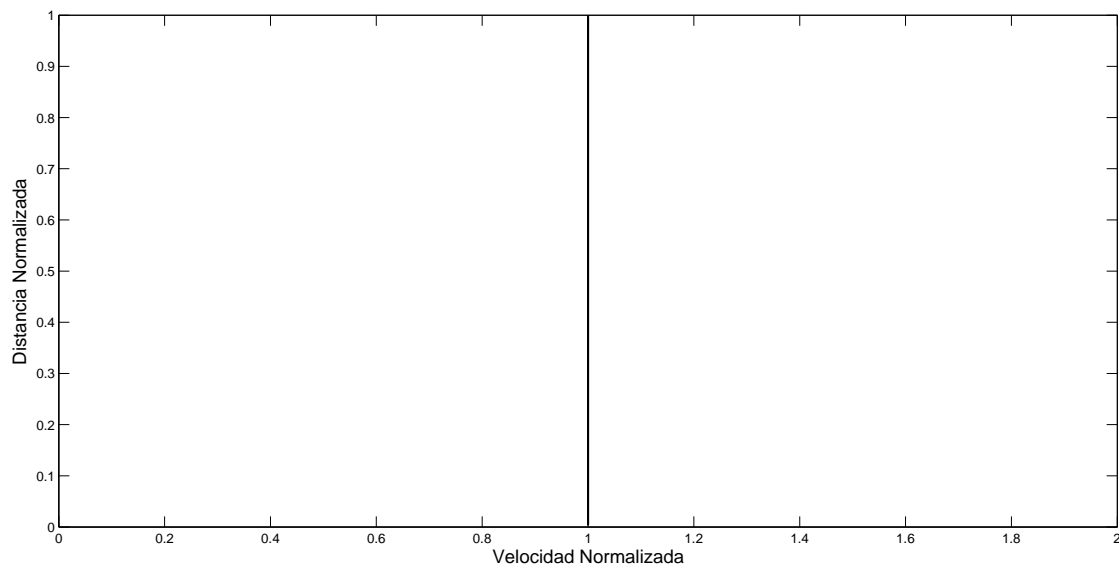


Figura 2-14.: Retrato de Fase. Para $Ts = 1.0$

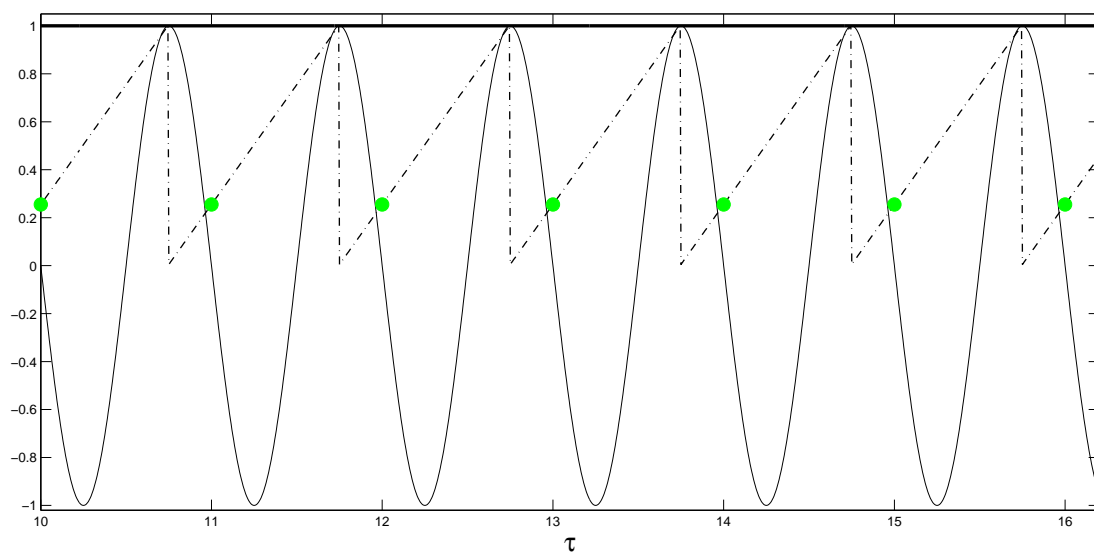


Figura 2-15.: Evolución en el Tiempo. Para $Ts = 1.0$

3. Análisis de simulaciones numéricas

En el capítulo anterior, se realizó un estudio numérico del modelo normalizado Ec.(2-5). Este modelo describe la dinámica de un sólo vehículo que viaja sobre una vía que tiene n semáforos, donde se consideró que todos los semáforos presentan distancias fijas, es decir, $L_n = L$. Además, la función que modela el semáforo fue $\sin(T_s \tau)$; esto indica que todos los semáforos tienen la misma frecuencia de cambio, $\omega_n = \omega$, el mismo ciclo $T_{sn} = T_s$ y un desfase nulo, $\varphi_n = 0$.

El propósito de este capítulo es modificar los supuestos del modelo normalizado ec.(2-5) del capítulo anterior, al cambiar algunos parámetros del modelo y, de esta manera, generar nuevos casos de estudio. Con estos nuevos modelos, se harán escenarios de comparación entre los modelos para observar como los parámetros afectan la dinámica del vehículo.

Para todos los escenarios de comparación a manera de ejercicio, se considera un vehículo que viaja a través de una secuencia de 20 semáforos, el cual cumple las condiciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Es importante mencionar que en todos los casos de estudio se considerará que el ciclo normalizado $T_{sn} = T_s$, de esta manera no importa la posición del n -ésimo semáforo que su ciclo normalizado será el mismo para todos ellos, lo que realmente variará será el ciclo T_n ya que éste es dependiente de la distancia entre semáforos consecutivos L_n , como lo ilustra la Ec. (2-7) la cual permitirá obtener el ciclo T_n de cada semáforo en unidades de tiempo:

$$T_n = \frac{2\pi L_n}{T_s v_{max}}$$

A continuación se hace una descripción de cada modelo de estudio, al variar los parámetros del sistema:

1. **Modelo I:** describe la dinámica de un sólo vehículo que viaja sobre una vía, donde la distancia entre semáforos es fija $L_n = L$. Los semáforos tienen la misma frecuencia de cambio, $\omega_n = \omega$, el mismo ciclo $T_n = T$ y un desfase nulo, $\varphi_n = 0$.
2. **Modelo II:** se modificará el parámetro L_n ; es decir, se considerará la distancia entre semáforos consecutivos diferente. La función que modela el semáforo tendrá un desfase nulo y el ciclo T_n del n -ésimo semáforo será diferente, dado que este parámetro depende de la distancia de cada tramo como lo ilustra la ec. (2-7).

3. **Modelo III:** se trabajará con distancias fijas entre semáforos consecutivos; es decir $L_n = L$ y el desfase φ_n de la señal de cada semáforo será diferente de cero, además el ciclo del semáforo será igual para todos, $T_n = T$.
4. **Modelo IV:** éste es el más próximo a la realidad porque se supone que las distancias entre semáforos consecutivos son diferentes, el desfase de la señal del semáforo, $\varphi \neq 0$ y el ciclo de cada semáforo T_n será diferente como lo indica la Ec. (2-7).

3.1. Primer escenario

En esta sección, se mostrarán una serie de simulaciones numéricas, para comparar la dinámica de un vehículo que viaja sobre una vía con distancias fijas entre los semáforos, (**Modelo I**); con la dinámica de un vehículo que viaja por una vía donde las distancias entre los semáforos son diferentes, (**Modelo II**).

3.1.1. Esquema numérico

Con el propósito de comparar estos dos modelos, se considerará el parámetro de bifurcación T_s , el ciclo normalizado del semáforo y los demás parámetros serán fijos. Estos valores fueron tomados de fuentes secundarias [73] y son mostrados en la Tabla (**3-1**).

Tabla 3-1.: Parámetros del Modelo I

Frecuencia de cambio	$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$
Ciclo	$T_n = \frac{2\pi L}{T_s v_{max}}$
Desfase	$\varphi_n = 0$
Distancia entre semáforos	$L = 200m$
Velocidad máxima	$v_{m\acute{a}x} = 14m/s$
Aceleración positiva	$a_+ = 2m/s^2$
Aceleración negativa	$a_- = 6m/s^2$

En el **modelo II**, el valor de los parámetros estará dado por la Tabla (**3-1**) y la distancia entre semáforos consecutivos se muestran en la Tabla (**3-6**).

Se aclara que cada dato en la Tabla(3-6), representa la distancia entre dos semáforos consecutivos dada en metros, las cuales fueron tomadas como ejemplo para realizar las simulaciones. Como se esta modelando una vía que tiene 21 semáforos entonces se requiere 20 distancias consecutivas, como lo muestra la siguiente tabla.

Tabla 3-2.: Distancia entre Semáforos Consecutivos

165	215	205	200	190	125	210	180	185	200
165	215	205	200	190	125	210	180	185	200

Diagramas de Bifurcación

En las Fig.(2-1) y Fig.(2-2) se tiene como parámetro de bifurcación el ciclo normalizado del semáforo T_s , que se grafica a lo largo del eje horizontal y, en el eje vertical, se muestra la distancia normalizada del automóvil en los diferentes ciclos del semáforo.

En estos diagramas se observan diferentes fenómenos, que indican la riqueza dinámica de los modelos I y II, tales como fractalidad, períodos múltiples, doblamientos de período, caos, entre otros.

En la Fig.(3-1), cuando T_s toma valores entre 0.7 y 1 se observan unas líneas, que se van acumulando a medida que T_s se acerca al valor de uno, y de esta manera se pueden observar múltiples períodos. Luego, cuando $T_s > 1$ aparece una órbita de período uno. Después cuando el ciclo del semáforo se va incrementando, se presenta un doblamiento de período hacia el caos. Este comportamiento caótico es truncado y aparece nuevamente una órbita de período dos y finalmente una órbita de período uno.

En la Fig.(3-2), cuando el ciclo normalizado T_s toma valores entre 0.7 y 1.0 sucede un fenómeno muy similar al diagrama de bifurcación de la Fig.(3-1) del modelo I; es decir, en este intervalo aparecen unas líneas que se están acumulando a medida que T_s se acerca al valor de uno.

Al comparar el diagrama de bifurcación del modelo II con el modelo I, como lo ilustran las Fig.(3-3) y Fig.(3-4), se puede apreciar que cuando $T_s > 1$, la dinámica del vehículo en los dos modelos son diferentes. En la Fig.(3-3), se observan algunas órbitas periódicas las cuales ya no se encuentran en el diagrama de bifurcación para el modelo II como lo ilustra

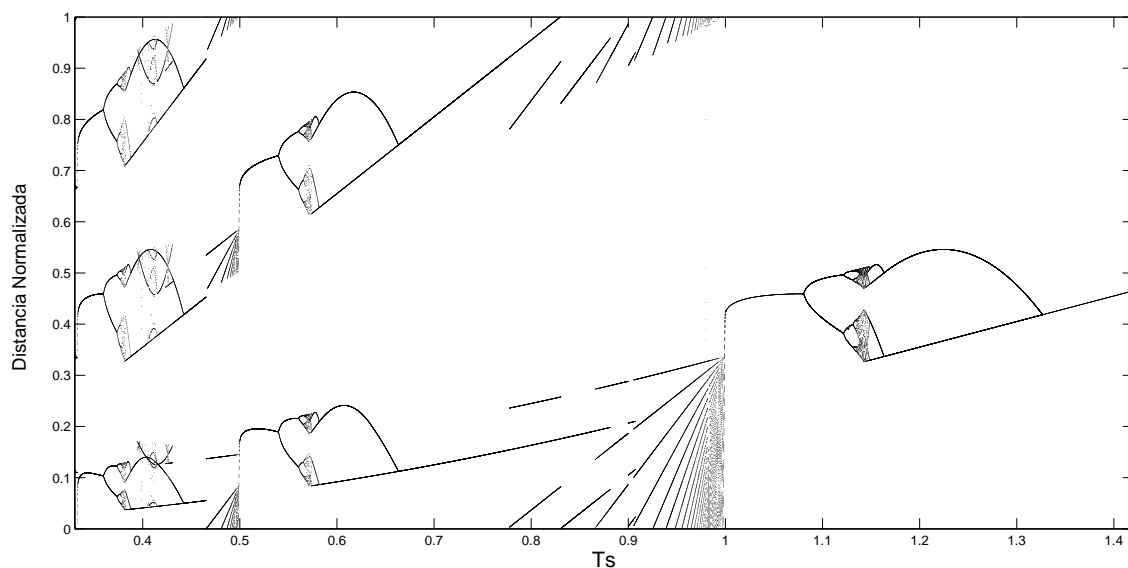


Figura 3-1.: Diagrama de Bifurcación Modelo I

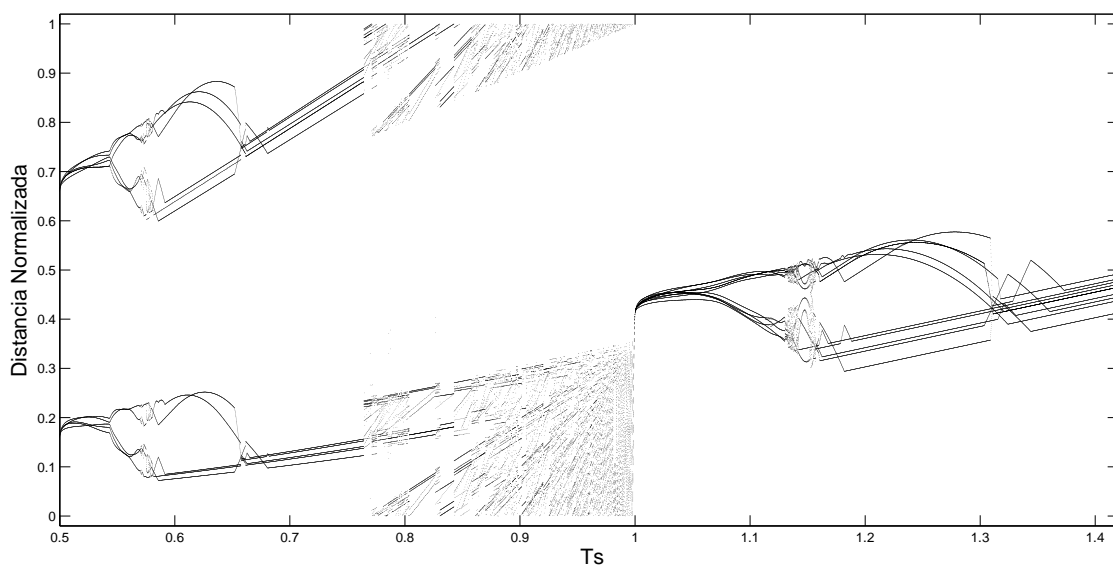


Figura 3-2.: Diagrama de Bifurcación Modelo II

la Fig.(3-4).

Por ejemplo, las órbitas de período uno de la Fig.(3-3) indican que la posición normalizada del vehículo siempre era la misma en cada tramo del trayecto de viaje en el instante que el semáforo conmuta de verde a rojo, donde se considera que un tramo es el recorrido entre

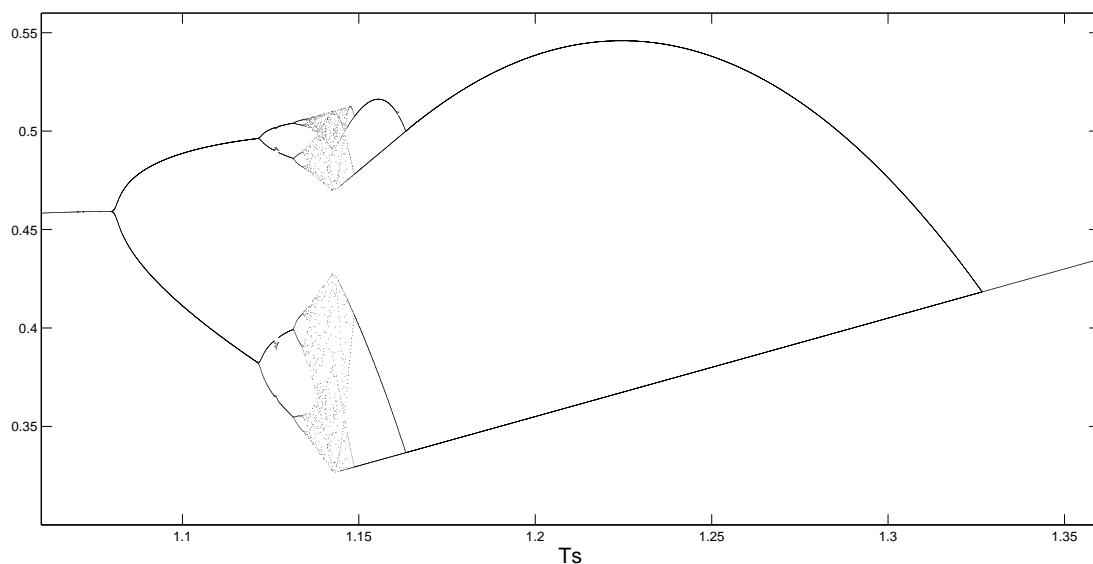


Figura 3-3.: Diagrama de Bifurcación Modelo I

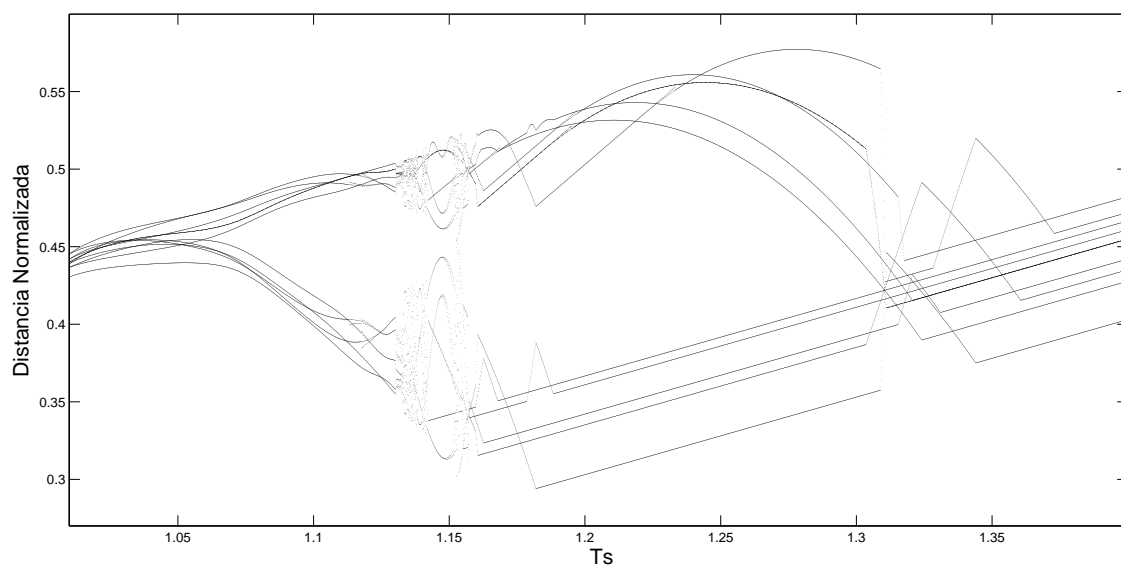


Figura 3-4.: Diagrama de Bifurcación Modelo II

dos semáforos consecutivos, lo cual no ocurre en el modelo II. Además, se puede apreciar que, al igual que las órbitas de período uno las órbitas de período dos desaparecieron de la Fig.(3-4). Estas órbitas indican, para el modelo I, que la posición del vehículo se repite cada dos tramos del trayecto de viaje. En el diagrama de bifurcación del modelo II Fig. (3-4), en

lugar de dichas órbitas de período dos, aparecen órbitas de períodos múltiples donde este fenómeno ocurre debido a que en nuevos casos de estudio (Modelo II) se consideran distancias diferentes entre semáforos consecutivos como lo muestra la Tabla(3-6).

Evolución en el Tiempo

Con el objetivo de visualizar mejor la dinámica de vehículo, se realiza una serie de simulaciones en el tiempo de los modelos I y II.

Las Fig.(3-5) y Fig.(3-6) muestra la evolución en el tiempo de las variables de estado para los modelos I y II respectivamente, donde la velocidad normalizada se representa con la línea continua gruesa; la posición normalizada, con la línea discontinua, y la señal del semáforo con la línea continua delgada. Además, los círculos indican la posición normalizada del vehículo en el instante que el semáforo cambia de verde a rojo.

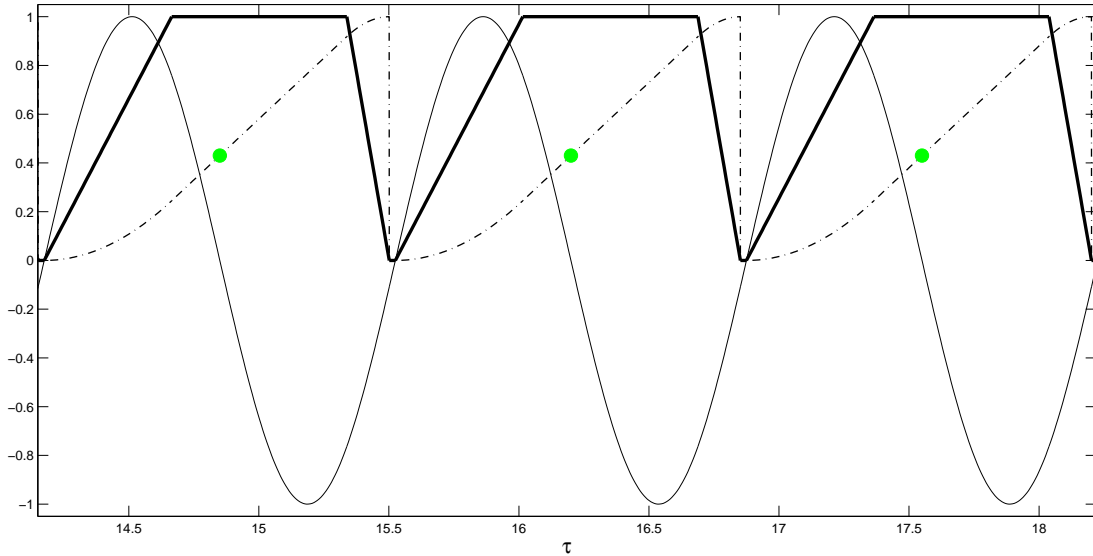


Figura 3-5.: Evolución en el Tiempo. Modelo I, $T_s = 1.35$

Cuando el ciclo normalizado $T_s = 1.35$, en el diagrama de bifurcación Fig.(3-1) se observa una órbita de período uno. Con ayuda del círculo de la Fig.(3-5) se visualiza la posición normalizada del vehículo en el instante en que el semáforo conmuta de verde a rojo. Es importante hacer notar que la posición siempre es la misma en cada semáforo. En la Fig.(3-6) no se presenta el fenómeno anterior. En este caso, cuando $T_s = 1.35$, en el diagrama de bifurcación Fig.(3-2) se observa una órbita de período múltiple. Por esta razón, la posición del vehículo en el instante en que el semáforo cambia de verde a rojo es diferente en los

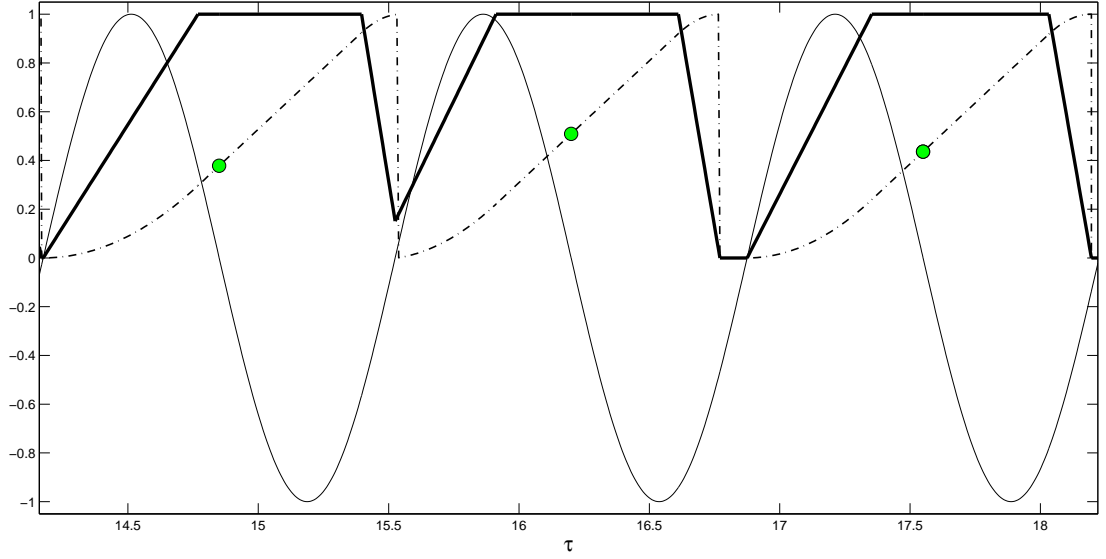


Figura 3-6.: Evolución en el Tiempo. Modelo II, $T_s = 1.35$

tramos del trayecto a lo largo de la vía.

3.2. Segundo escenario

En este segundo escenario, se realiza una comparación del modelo I con el modelo III. Es importante resaltar que no siempre los semáforos, en una vía, conmutan al mismo tiempo. Por esta razón se introduce un desfase $\varphi_n \neq 0$, en el modelo III. De esta manera, la señal del semáforo será $\sin(T_s\tau + \varphi_n)$, luego el desfase de la señal de cada semáforo es diferente de cero.

Toledo en el 2007 [65], propone modelar el desfase de la señal del semáforo como:

$$\varphi_n = - \sum_{m=1}^n \frac{L_m \omega}{v_{ola}}. \quad (3-1)$$

Este valor del parámetro φ_n fue propuesto con el fin de obtener una ola verde; es decir, la serie de semáforos se coordinan para permitir un flujo continuo del tráfico sobre la vía.

En esta sección se pretende estudiar la dinámica de un vehículo que viaja a través de una sucesión progresiva de luces verdes, que es movida con una velocidad de ola, v_{ola} , y encontrar el valor de los parámetros que hacen que el vehículo se detenga el menor número de veces en las intersecciones. Esto en la práctica es de gran utilidad, ya que si se logra sincronizar los semáforos y obtener una ola verde, se permitirá un mayor volumen de tráfico y se reducirá el

tiempo de viaje, el ruido y el consumo de energía, entre otros beneficios, debido a que el número de veces que el vehículo se ve forzado a parar sobre la vía es mucho menor.

3.2.1. Esquema numérico

En esta subsección, se mostrarán una serie de simulaciones numéricas, de la dinámica de un vehículo que viaja por una vía, donde la distancia entre los semáforos son fijas y el desfase de la señal de cada semáforo, es dada por la Ec.(3-1), (**Modelo III**). Con estas simulaciones se hará una comparación de la dinámica de un vehículo que viaja sobre una vía con distancias fijas entre los semáforos y desfase de la señal de cada semáforo, $\varphi_n = 0$, (**Modelo I**). Con esta información se analizará si los parámetros del modelo influyen en la dinámica vehicular.

Para las simulaciones, se usarán los valores de las Tablas (3-1) y (3-3), además el valor que toma el nuevo parámetro v_{ola} llamado la velocidad de la ola se muestran en la (3-4), recuérdese que v_{ola} es la velocidad con la que viaja la luz verde a través de la secuencia de semáforos.

Tabla 3-3.: Parámetros del Modelo III

Frecuencia de cambio	$\omega_n = \frac{2\pi}{T}$
Ciclo	$T = \frac{2\pi L}{T_s v_{max}}$
Desfase	$\varphi_n = -\frac{nL\omega}{v_{ola}}$
Distancia entre semáforos	$L = 200m$
Velocidad máxima	$v_{m\acute{a}x} = 14m/s$
Aceleración positiva	$a_+ = 2m/s^2$
Aceleración negativa	$a_- = 6m/s^2$

El parámetro velocidad de la ola v_{ola} , tomará valores al rededor de la velocidad máxima permitida sobre la vía. Como el valor máximo de la velocidad normalizada es $u = 1$ entonces v_{ola} tendrá valores al rededor de uno, como lo muestra la Tabla (3-4).

Tabla 3-4.: Velocidad de la Ola

v_{ola}	0.93	0.99	1.01	1.07
-----------	------	------	------	------

Diagrama de Bifurcación

En la Fig.(3-7), se tiene como parámetro de bifurcación el ciclo normalizado del semáforo T_s el cual se grafica a lo largo del eje horizontal y, en el eje vertical, se muestra la posición normalizada del automóvil.

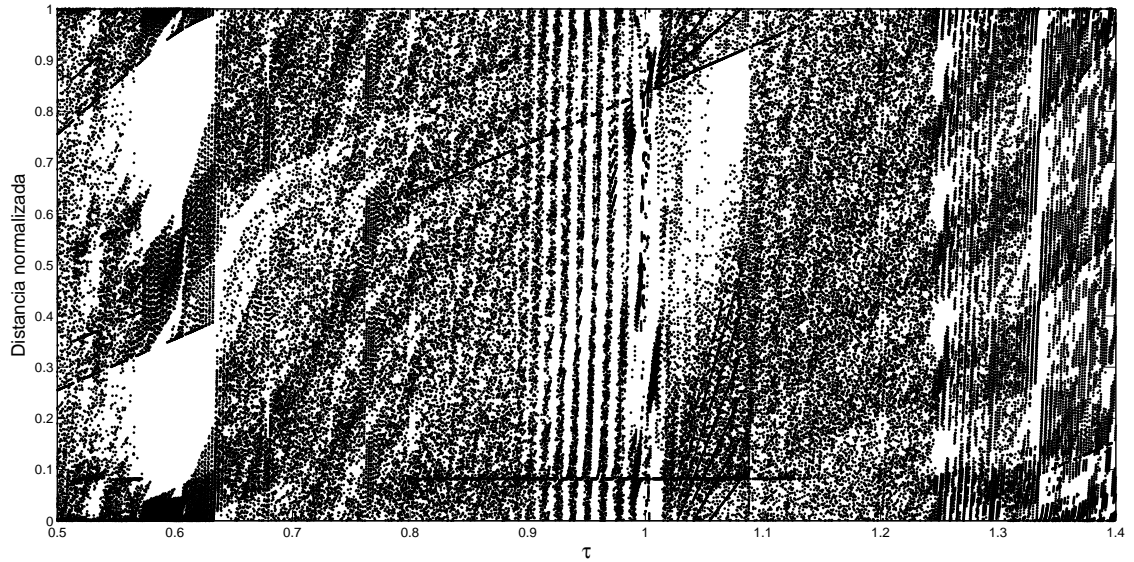


Figura 3-7.: Diagrama de Bifurcación Modelo III

En la Fig.(3-7), se observa una nube de puntos, de esta manera no se puede percibir la existencia de órbitas periódicas como sí ocurrió en el diagrama de bifurcación del modelo I (3-1).

La diferencia del **modelo III** respecto al **modelo I**, es que el desfase φ_n es diferente de cero. Para el modelo III $\varphi_n = -\frac{nL}{v_{ola}}$. Este parámetro tiene una gran influencia en la dinámica del vehículo, lo cual se observa al comparar las Fig.(3-7) y Fig.(3-1), dado que existen una gran diferencia entre los diagramas de bifurcación de los dos modelos estudiados.

Evolución en el Tiempo

En las siguientes figuras se muestra la evolución en el tiempo, donde la velocidad normalizada se representa con la línea continua gruesa.

La serie de simulaciones para los modelos I y III se hará con el objetivo de comparar y observar la influencia de los semáforos en la dinámica vehicular al variar sus parámetros tales como el ciclo normalizado del semáforo T_s y el desfase φ_n .

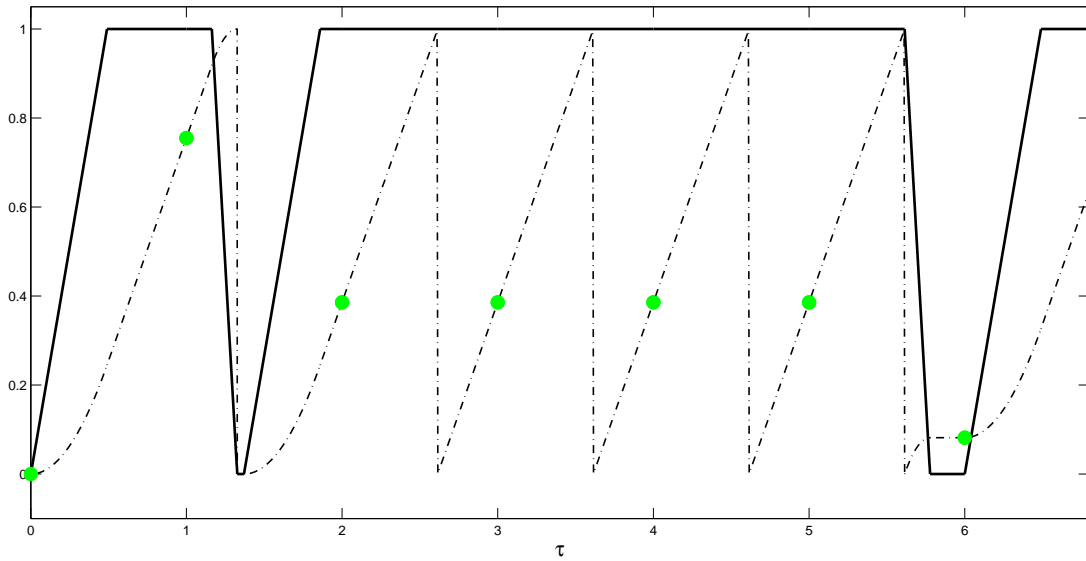


Figura 3-8.: Evolución en el Tiempo Modelo III. Para $T_s = 1.0$ y $v_{ola} = 1.07$

Es importante resaltar que en los modelos I y III las representaciones gráficas Fig.(3-8), Fig.(3-9) y Fig.(3-10) fueron obtenidas para un valor del ciclo normalizado del semáforo $T_s = 1.0$ y las distancias entre los semáforos son fijas e iguales para los dos modelos.

En la Fig.(3-8), cuando la velocidad de la ola y el ciclo normalizado del semáforo toman valores $T_s = 1.0$ y $v_{ola} = 1.07$ respectivamente, se observa que la línea continua gruesa, la cual representa la velocidad normalizada del vehículo, toma el valor de cero en cuatro momentos. Ello indica que el vehículo se ve forzado a parar en cuatro ocasiones durante el recorrido.

En la Fig.(3-9) los parámetros toman los valores de $v_{ola} = 0.93$ y $T_s = 1.0$, se observa que el vehículo se ve forzado a parar una sola vez en todo el recorrido. Además, en las Fig.(3-8) y Fig.(3-9) se aprecia que la velocidad del vehículo durante todo el trayecto tomó diferentes valores a la velocidad máxima; mientras que en la Fig.(3-10) se tiene que para el mismo valor de $T_s = 1.0$ el vehículo se ve forzado a parar una sola vez y recorre toda la secuencia de semáforos con velocidad máxima.

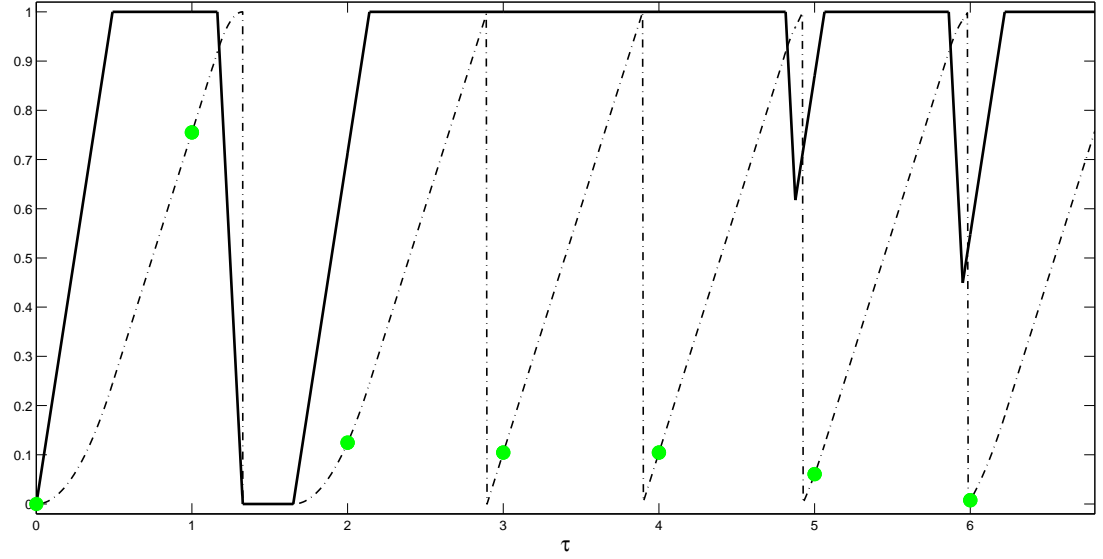


Figura 3-9.: Evolución en el Tiempo Modelo III. Para $T_s = 1.0$ y $v_{ola} = 0.93$

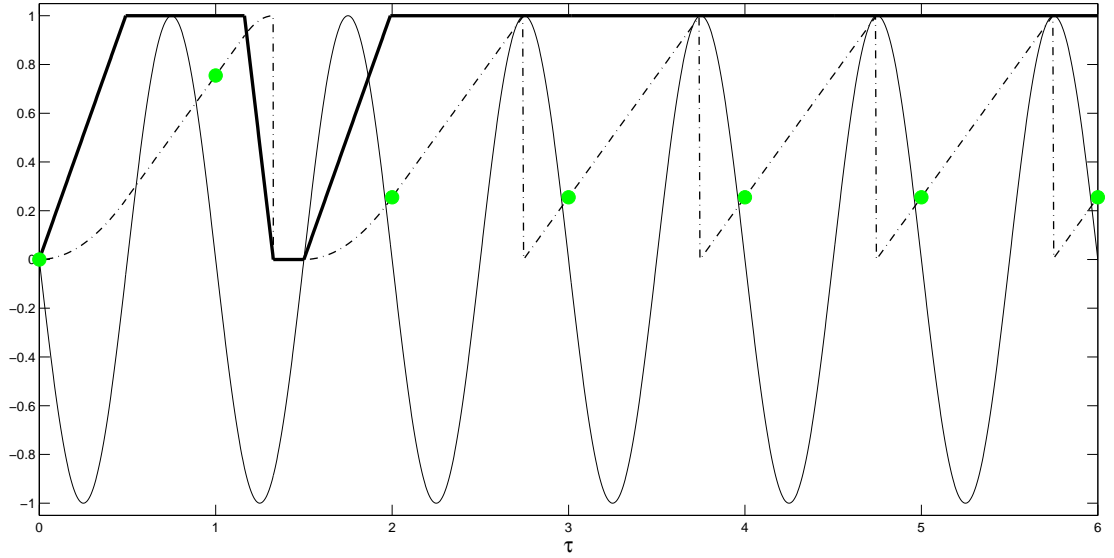


Figura 3-10.: Evolución en el Tiempo Modelo I, $T_s = 1.0$

El fenómeno ocurrido en las Fig.(3-10) y Fig.(3-9) se conoce como ola verde.

En el modelo III, cuando la velocidad de la ola toma valores alrededor de uno, $v_{ola} = 1.01$ y $v_{ola} = 0.99$ y el ciclo del semáforo es $T_s = 1.0$, se observa en las Fig.(3-11) y Fig.(3-12)

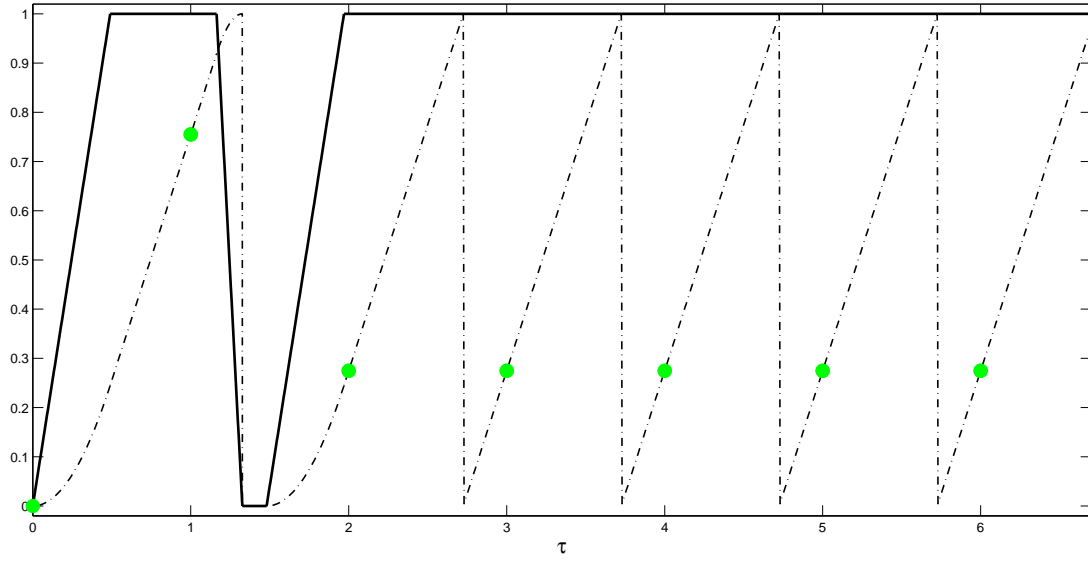


Figura 3-11.: Evolución en el Tiempo Modelo III. Para $T_s = 1.0$ y $v_{ola} = 1.01$

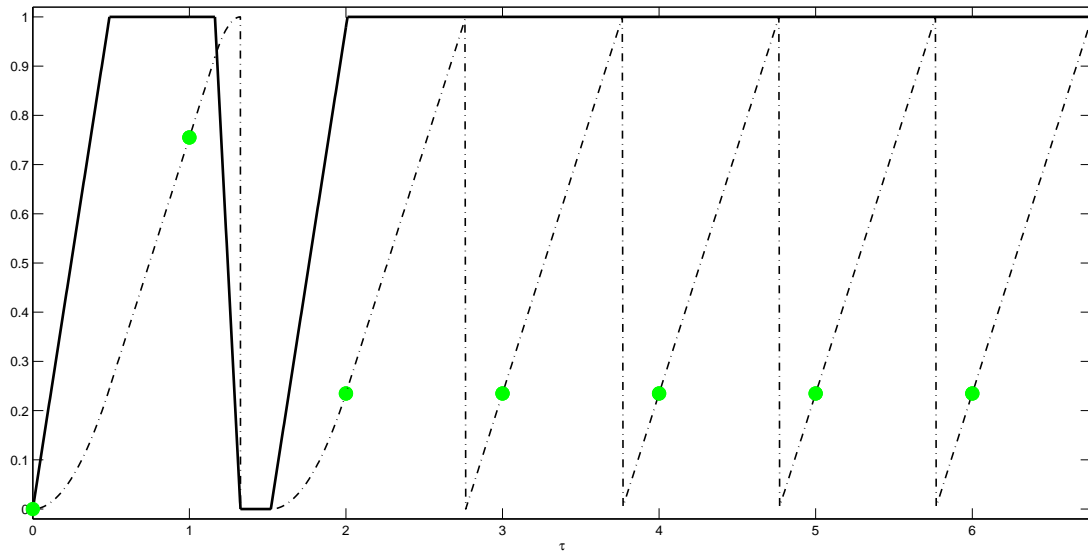


Figura 3-12.: Evolución en el Tiempo Modelo III. Para $T_s = 1.0$ y $v_{ola} = 0.99$

que el vehículo tiene un comportamiento similar al modelo I como lo muestra la Fig. (3-10). El fenómeno ocurrido en las gráficas (3-10), (3-9), (3-11) y Fig.(3-12) se conoce como ola verde, éste permite reducir los tiempos de viaje, dado que el número de paradas del vehículo a través de la vía es menor, por lo tanto la ola verde es una herramienta importante en la

administración del tráfico vehicular.

De las comparaciones anteriores, se observa que el parámetro velocidad de la ola v_{ola} tiene una gran influencia en la dinámica del vehículo, dado que dependiendo de su valor se obtiene o no la ola verde.

De la observación anterior, nace el siguiente interrogante: ¿si se conservan los valores del parámetro v_{ola} alrededor de uno, se podrá obtener ola verde variando el ciclo normalizado del semáforo?. Para dar respuesta a esta pregunta se analizarán las siguientes simulaciones.

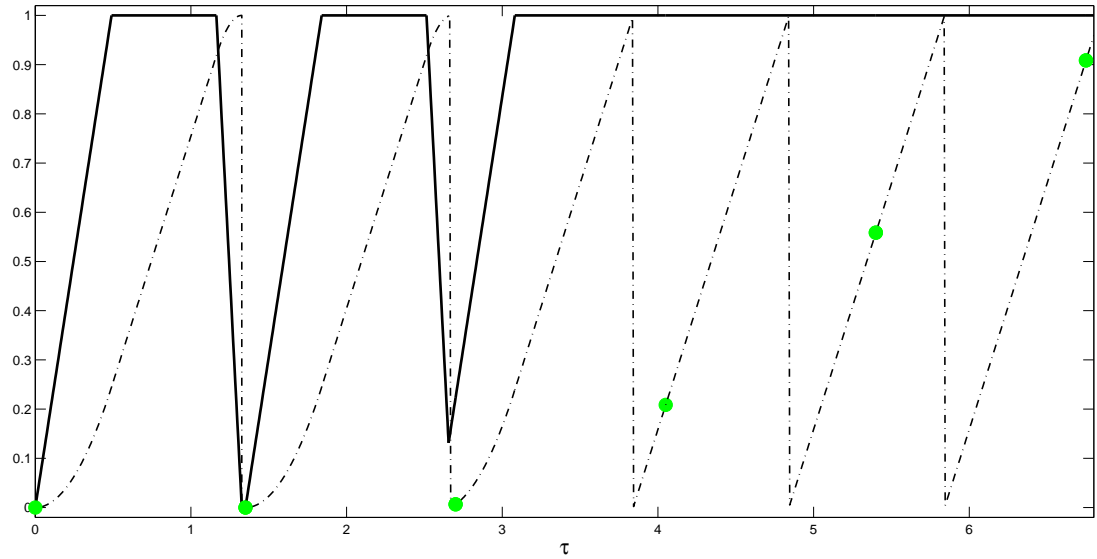


Figura 3-13.: Evolución en el Tiempo Modelo III. Para $T_s = 1.35$ y $v_{ola} = 1.01$

Al comparar las figuras Fig.(3-11,3-13) y Fig.(3-12,3-14) del modelo III, se tiene que el valor del parámetro v_{ola} se conserva pero el ciclo del semáforo cambia de $T_s = 1.0$ a $T_s = 1.35$. En las Fig.(3-13,3-14) se aprecia que la ola verde que se genera bajo el valor de los parámetros dados desaparece en las Fig(3-11,3-12), lo cual indica que el ciclo normalizado T_s tiene una gran influencia sobre el sistema.

En el modelo I se observó en la Fig.(3-10) que, cuando el ciclo normalizado del semáforo toma el valor de $T_s = 1.0$, se presenta el fenómeno de ola verde, el cual se perdió en el modelo III para algunos valores de la velocidad de la ola v_{ola} . La pregunta que nace a raíz del análisis anterior es: ¿para qué valores del parámetro v_{ola} el vehículo se detiene el menor número de veces en las intersecciones cuando el ciclo normalizado del semáforo es $T_s = 1.0$?

En las Fig.(3-15,3-16) se grafica a lo largo del eje horizontal el parámetro velocidad del la

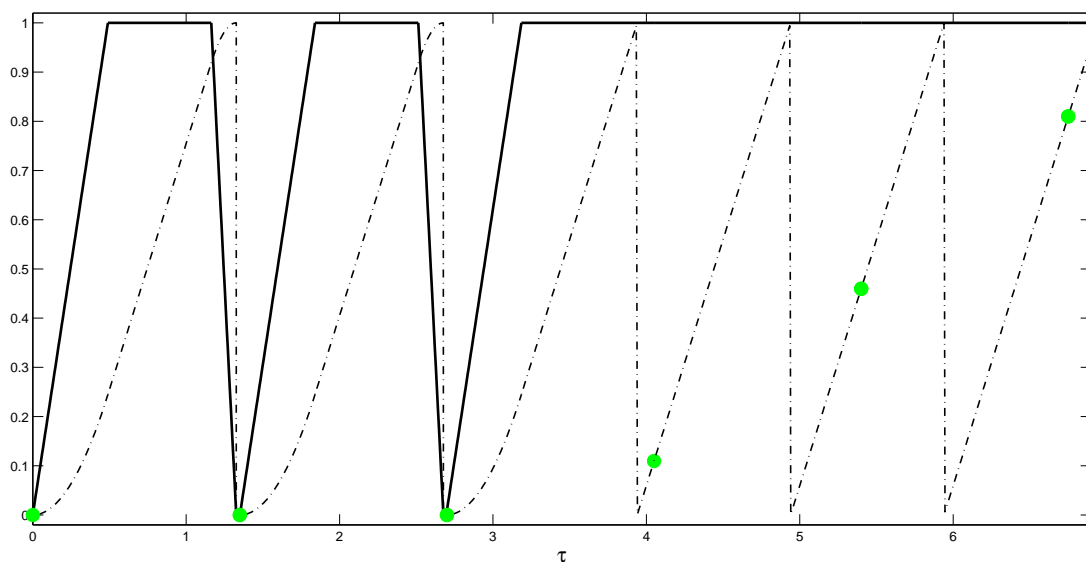


Figura 3-14.: Evolución en el Tiempo Modelo III. Para $T_s = 1.35$ y $v_{ola} = 0.99$

ola v_{ola} y en el eje vertical se muestra el número de paradas del automóvil durante todo el recorrido.

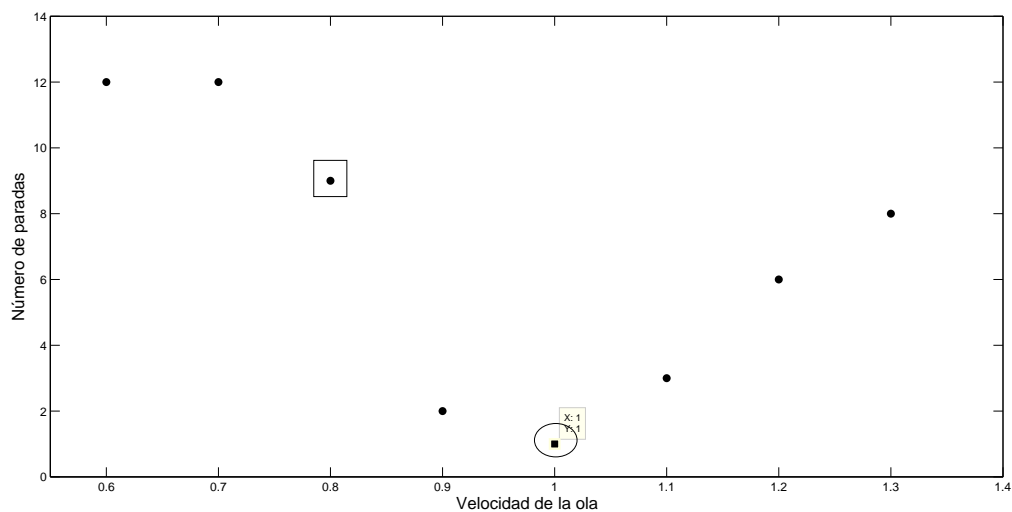


Figura 3-15.: Número de Paradas del Modelo III. Para $T_s = 1.0$

Para dar respuesta a la pregunta anterior se observan las Fig.(3-15,3-16). Por ejemplo, el rectángulo indica que cuando los parámetros velocidad de la ola y el ciclo normalizado del

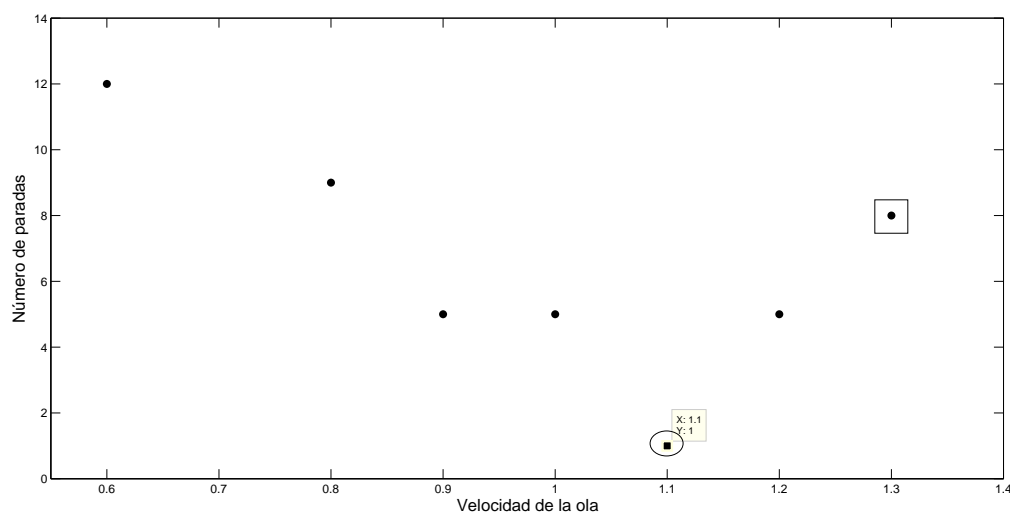


Figura 3-16.: Número de Paradas del Modelo III. Para $T_s = 1.35$

semáforo toman los valores de $v_{ola} = 0.8$ y $T_s = 1.0$ respectivamente, el vehículo se detiene en nueve ocasiones durante el recorrido a través de la vía, además si $v_{ola} = 1.0$ y $T_s = 1.0$ el vehículo se detiene una sola vez, para este caso de estudio el automóvil se detiene el menor número de veces en todo el recorrido. Lo cual trae grandes beneficios dado que se reduce el consumo del combustible, debido a que el número de veces que el vehículo se ve forzado a frenar hasta detenerse es mínimo.

Cuando el ciclo normalizado del semáforo toma el valor de $T_s = 1.35$ se tiene que cuando $v_{ola} = 1.1$, el vehículo para una sola vez, como lo ilustra el círculo en la Fig.(3-16); y si $v_{ola} = 1.3$, el vehículo se detiene en ocho ocasiones durante el recorrido.

Del análisis anterior se puede concluir que al configurar los parámetros del semáforo se logra minimizar el número de paradas del vehículo sobre la vía, lo cual trae grandes beneficios para el conductor dado que con esto es posible ahorrar tiempo de viaje y se reduce el consumo del combustible en el trayecto de viaje.

3.3. Tercer escenario

En las secciones anteriores se han analizado dos escenarios que llevaron a tres modelos; esto se ha realizado con el objetivo de analizar como los parámetros del semáforo y la distancia entre ellos influyen en el comportamiento de un vehículo que viaja a través de una vía en una ciudad. Con el propósito de obtener un modelo que se aproxime a la realidad se realiza este tercer escenario.

En esta sección se estudiará el cuarto modelo, en el cual se considerará una vía donde la distancia entre semáforos consecutivos no es fija y el desfase de la señal de cada semáforo dado por :

$$\varphi_n = - \sum_{m=1}^n \frac{L_m \omega}{v_{ola}}$$

donde L_m es la distancia entre semáforos consecutivos, ω es la frecuencia del n-ésimo semáforo y v_{ola} es la velocidad con la que viaja la luz verde.

3.3.1. Esquema numérico

En esta subsección, se mostrarán una serie de simulaciones numéricas, para comparar el **modelo II** con el **modelo IV**. El modelo II describe la dinámica de un vehículo que viaja por una vía donde la distancia entre los semáforos no es fija y la señal de cada semáforo es dada por $sen(T_s \tau)$. El propósito de comparar estos dos modelos, es observar como el parámetro φ_n influye en el comportamiento del vehículo.

Para realizar las simulaciones del modelo IV, se usaran la Tabla.(3-5) y la distancia entre semáforos es dada por la Tabla(3-6). Además,

$$\varphi_n = - \sum_{m=1}^n \frac{L_m \omega}{v_{ola}}$$

y para el modelo II se usarán las mismas tablas pero $\varphi_n = 0$.

Tabla 3-5.: Parámetros del Modelo IV

Frecuencia de cambio	$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$
Ciclo	$T_n = \frac{2\pi L_n}{T_s v_{max}}$
Desfase	$\varphi_n = - \sum_{m=1}^n \frac{L_m \omega}{v_{ola}}$
Velocidad máxima	$v_{m\acute{a}x} = 14m/s$
Aceleración positiva	$a_+ = 2m/s^2$
Aceleración negativa	$a_- = 6m/s^2$

Se aclara que cada dato en la Tabla(3-6), representa la distancia entre dos semáforos consecutivos dada en metros. Las cuales fueron tomadas como ejemplo para realizar las simulaciones.

Como se esta modelando una vía que tiene 21 semáforos entonces se requiere 20 distancias consecutivas, como lo muestra la siguiente tabla.

Tabla 3-6.: Distancia entre Semáforos Consecutivos

165	215	205	200	190	125	210	180	185	200
165	215	205	200	190	125	210	180	185	200

Diagrama de Bifurcación

En la Fig.(3-17) se tiene como parámetro de bifurcación el ciclo normalizado del semáforo T_s el cual se grafica a lo largo del eje horizontal y, en el eje vertical, se muestra la posición normalizada del automóvil.

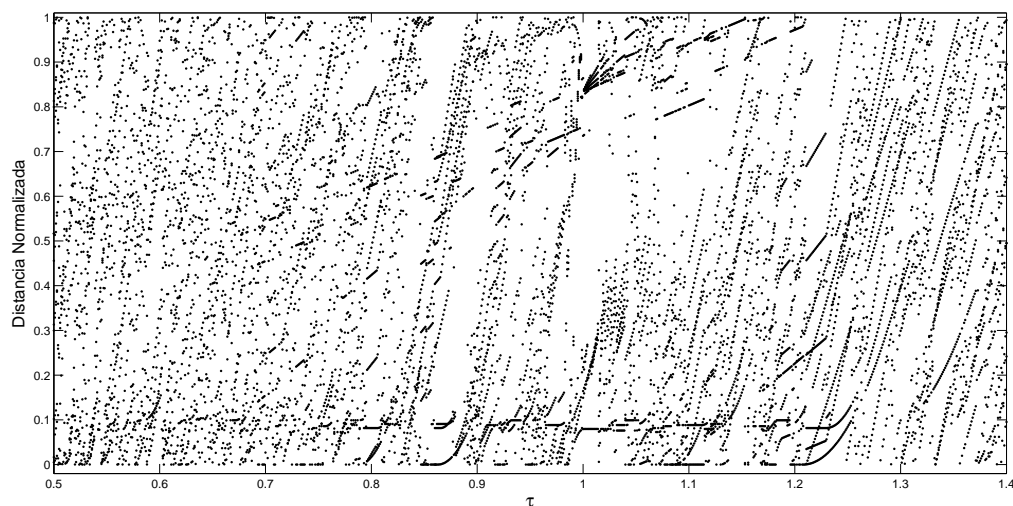


Figura 3-17.: Diagrama de Bifurcación modelo IV

En el diagrama de bifurcación Fig.(3-17) del modelo IV se observa una nube de puntos, esto muestra una diferencia con el diagrama de bifurcación del modelo II Fig.(3-2). Por ejemplo, las órbitas periódicas de la Fig.(3-2), desaparecen en la Fig(3-17). Esto indica que el desfase considerado $\varphi_n = -\sum_{m=1}^n \frac{L_m \omega}{v_{ola}}$ es un parámetro de gran influencia en la dinámica del vehículo del modelo IV. Este comportamiento es muy similar a lo ocurrido en el segundo

escenario de la sección anterior donde se compararon los diagramas de bifurcación de los modelos I y III.

Evolución en el Tiempo

En las siguientes figuras se muestra la evolución en el tiempo de las variables de estado, donde la velocidad normalizada se representa con la línea continua gruesa, la distancia normalizada con la línea discontinua y la señal del semáforo con la línea continua delgada. Además, los círculos indican la posición del vehículo en el instante que el semáforo cambia de verde a rojo.

Las siguientes simulaciones en el tiempo permiten realizar una comparación entre los modelos II y IV.

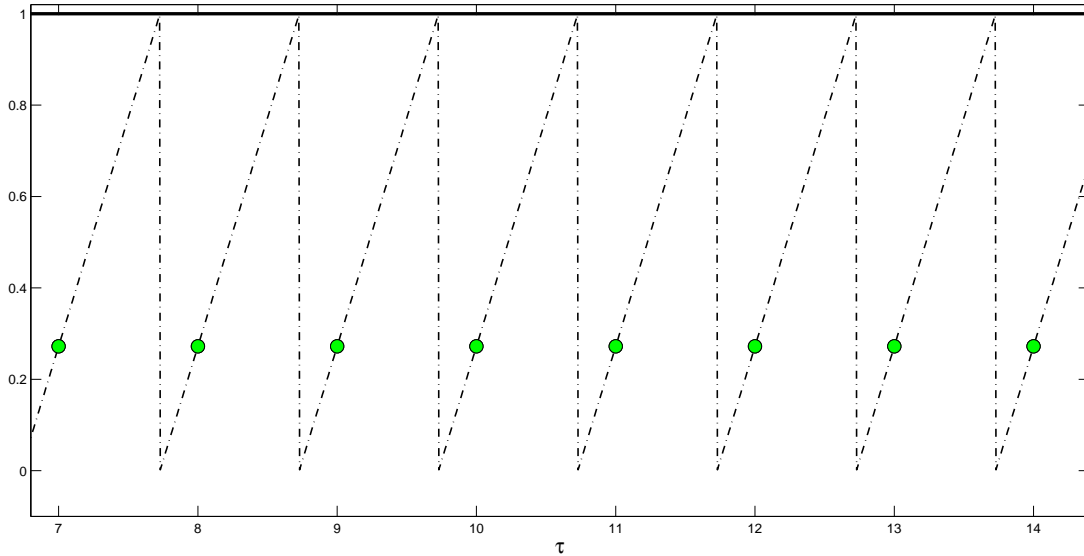


Figura 3-18.: Evolución en el Tiempo Modelo II, $T_s = 1.0$

En el modelo II se observa en la Fig.(3-18), que cuando el ciclo del semáforo $T_s = 1.0$ se obtiene una ola verde, y esto se garantiza debido a que la velocidad es cero una sola vez, lo cual indica que el conductor se detuvo antes de pasar el segundo semáforo, pero después logra cruzar toda la secuencia con la velocidad máxima permitida. Pero en la Fig.(3-19) correspondiente al modelo IV, se tiene que el vehículo se ve forzado a detenerse en dos ocasiones; una antes del séptimo semáforo y otra antes del semáforo quince. Además, el vehículo viaja por toda la vía variando su velocidad, lo que no ocurrió en el modelo II.

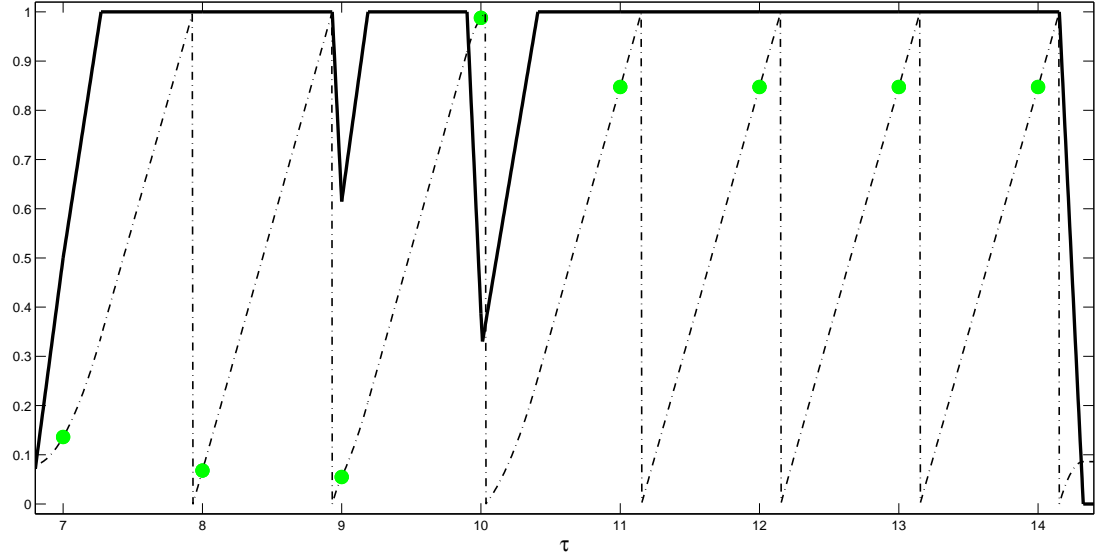


Figura 3-19.: Evolución en el Tiempo Modelo IV, $T_s = 1.0$ y $v_{ola} = 1.0$

El diagrama de bifurcación Fig.(3-17) y las figuras de evolución en el tiempo Fig.(3-18) y Fig.(3-19) ilustran que el desfase de la señal del semáforo tiene una influencia fuerte en la dinámica del vehículo. Además, se tiene que el parámetro φ_n se encuentra en términos de la velocidad de la ola v_{ola} y, dependiendo del valor que tome, permite que la secuencia progresiva de luces verde se mueva más rápido o más lento.

Como se observó en la sección anterior y en ésta, la velocidad de la ola v_{ola} y el ciclo normalizado del semáforo T_s tienen una gran influencia en la dinámica del vehículo. En la práctica, es de gran utilidad sincronizar los semáforos y así obtener una ola verde que permita reducir el tiempo de viaje. A continuación se mostrarán una serie de simulaciones numéricas que permitan conocer el número de paradas sobre una vía dependiendo del valor que tomen los parámetros T_s y v_{ola} .

En las Fig.(3-20,3-21) se grafica, a lo largo del eje horizontal el parámetro velocidad de la ola v_{ola} y, en el eje vertical, se muestra el número de paradas del automóvil durante todo el recorrido.

Se observa en la Fig.(3-20) que cuando el ciclo normalizado del semáforo toma el valor de $T_s = 1.0$ y la velocidad de la ola toma valores cercanos a 0,9, el vehículo para una sola vez; mientras en la Fig.(3-21) cuando el ciclo normalizado del semáforo es $T_s = 1.35$ y la velocidad de la ola toma valores entre 0.93 y 1.0, el vehículo para en dos ocasiones durante el recorrido a través de la secuencia de semáforos.

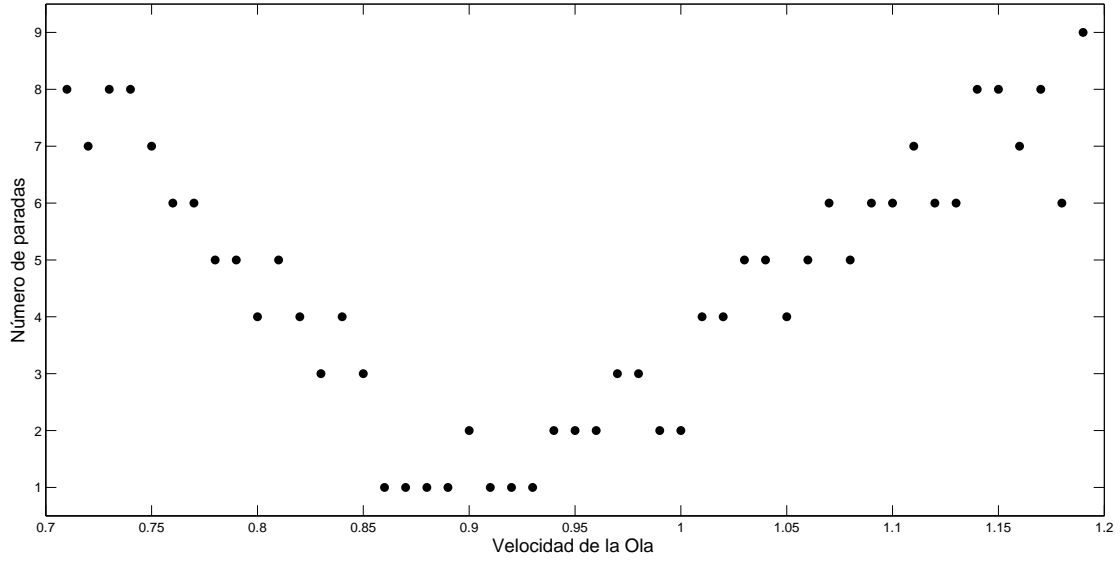


Figura 3-20.: Número de Paradas del Modelo IV. Para $T_s = 1.0$

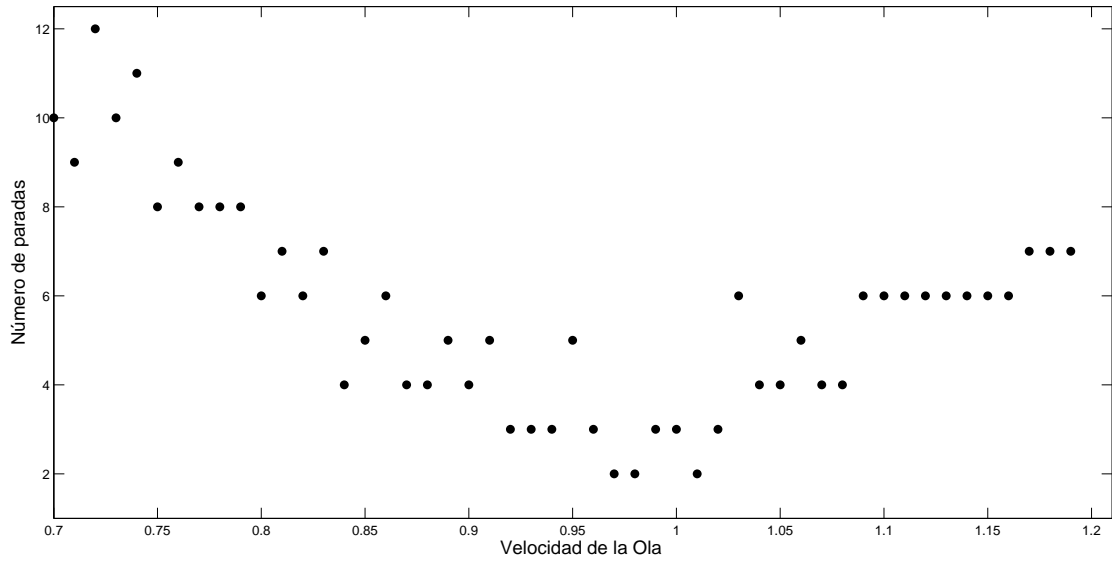


Figura 3-21.: Número de Paradas del Modelo IV. Para $T_s = 1.35$

Además, obsérvese también, que cuando v_{ola} toma valores cercanos a 0,9 y a 1,0 el vehículo se detiene el menor número de veces. Pero cuando el ciclo del semáforo tomó valores diferentes a uno, se aumenta el número de paradas. La pregunta que nace con esto es: ¿para qué valores

del ciclo normalizado T_s hacen que el vehículo se detenga el menor número de veces en las intersecciones con semáforos cuando la velocidad de la ola v_{ola} toma valores alrededor de uno?.

Dar respuesta a la pregunta anterior es de gran importancia porque al conocer el valor de los parámetros T_s y v_{ola} se podría configurar los semáforos y de esta manera se podría tener un mejor control sobre las variables de estado que describen la dinámica del vehículo.

Para dar respuesta a la pregunta se hará uso de la Fig.(3-22) la cual permite conocer el número de veces que el vehículo se detiene durante el recorrido debido a la configuración de los parámetros v_{ola} y T_s , los cuales hacen que el semáforo se encuentre en rojo. En la Fig.(3-22) se grafica a lo largo del eje X el parámetro velocidad de la ola v_{ola} , en el eje Y el ciclo normalizado T_s del semáforo, y en el eje Z se muestra el número de paradas del automóvil durante todo el recorrido a través de la secuencia de semáforos.

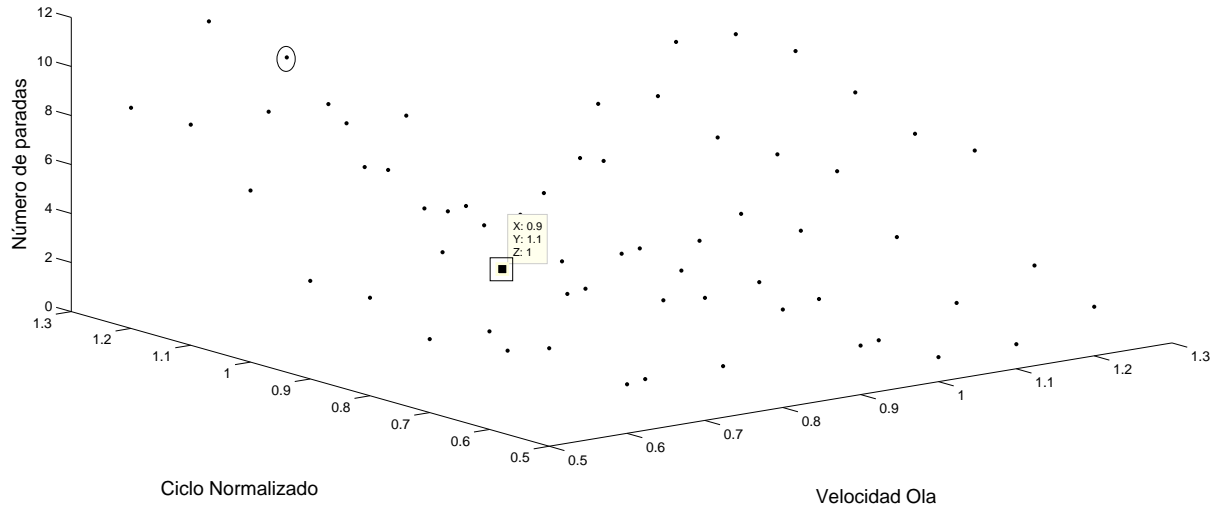


Figura 3-22.: Número de Paradas Modelo IV

La elipse sobre la Fig.(3-22) resalta el punto $P_1 = (0.7, 1.2, 10)$, el cual indica que cuando $v_{ola} = 0,7$ y $T_s = 1.2$ el vehículo se detiene en todo el recorrido en diez ocasiones, lo cual no es beneficioso para el conductor porque toda la secuencia tiene 20 semáforos y de estos se está deteniendo en la mitad de ellos. El cuadrado sobre la misma figura indica que si $v_{ola} = 0.9$ y $T_s = 1.1$ el vehículo se ve forzado a detenerse una sola vez, lo cual es más beneficioso para el conductor ya que logra cruzar toda la secuencia de semáforos deteniéndose el menor número de veces y con esto se podrá reducir el tiempo de viaje y el consumo del combustible durante

el trayecto de viaje.

Es importante resaltar que conocer el valor de los parámetros del semáforo es de gran utilidad dado que si se logra sincronizar los semáforos, se podrá obtener una ola verde que permita minimizar el número de paradas de un vehículo a lo largo de un recorrido sobre una vía.

4. Estabilidad

Las Fig.(4-1) y Fig.(4-2) dan una visualización del espacio de soluciones del modelo estudiado en el capítulo 2.

Debido a la periodicidad de las soluciones en la Fig.(4-1), el eje X representa la distancia recorrida por el vehículo d . Esta toma valores en el intervalo $[0, L]$, donde L es la distancia entre dos semáforos consecutivos. A lo largo del eje Y se grafica el tiempo t . Esta variable toma valores en el intervalo $[0, T]$, donde T es el ciclo del semáforo. Por último, el eje Z representa la velocidad v del vehículo. La cual toma valores en el intervalo $[0, v_{max}]$.

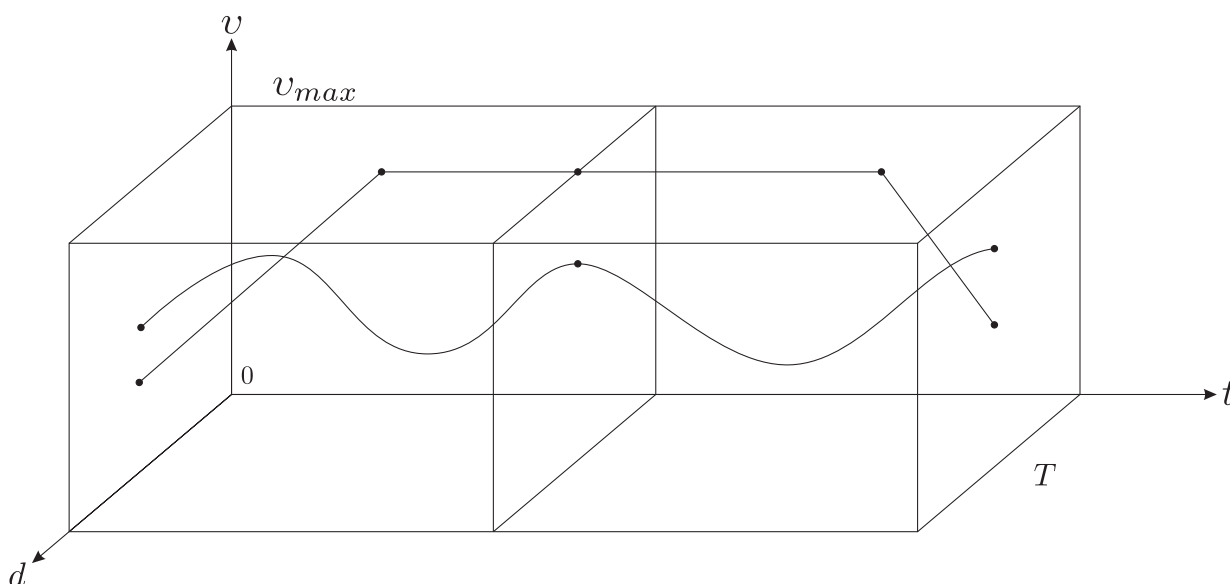


Figura 4-1.: Dominio de soluciones

Igualmente, debido a la periodicidad de las órbitas en la Fig.(4-2), el eje X representa la distancia recorrida por el vehículo d . Esta toma valores en el intervalo $[0, L]$, donde L es la distancia entre dos semáforos consecutivos. A lo largo del eje Z se grafica la velocidad v del vehículo. La cual toma valores en el intervalo $[0, v_{max}]$.

Como se puede observar las Fig.(4-1) y Fig.(4-2) son dos perspectivas diferentes del dominio de soluciones pero ellos son topológicamente equivalentes.

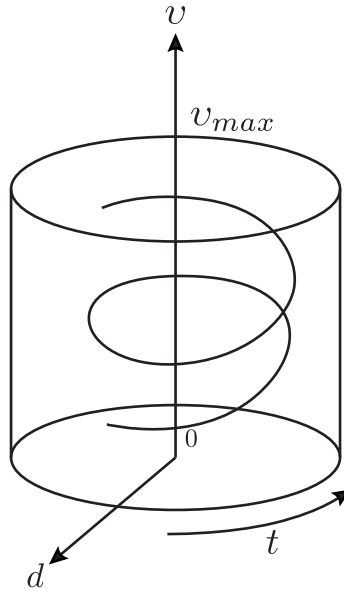


Figura 4-2.: Dominio de soluciones

La estabilidad de una órbita de un sistema dinámico autónomo describe si órbitas cercanas perturbadas en las condiciones iniciales, permanecen en la vecindad de la órbita o se alejarán de ella[40].

En este capítulo, se realizará un análisis de estabilidad para una órbita 1T-periódica y 2T-periódica. Estas órbitas fueron encontradas en el modelo estudiado en el capítulo dos, el cual describe la dinámica de un solo vehículo que viaja sobre una vía que tiene n semáforos, donde se consideró que todos los semáforos presentan distancias fijas, es decir, $L_n = L$. La función que modela el semáforo fue $\text{sen}(T_s \tau)$, esto indica que todos los semáforos tienen la misma frecuencia de cambio, $\omega_n = \omega$, el mismo ciclo $T_n = T$ y un desfase nulo, $\varphi_n = 0$.

En el capítulo 2, se realizó la descripción del modelo suave a trozos (2-5) para un sólo vehículo. También se obtuvo el diagrama de bifurcación (2-5) donde se resaltada que para el valor del ciclo normalizado $T_s = 1,4$ se obtenía una órbita de período uno y para $T_s = 1,2$ se observaba una órbita de período dos y sus respectivas representaciones gráficas son las Fig.(2-7) y Fig.(2-9).

Además se ilustra que el modelo (2-5) presenta tres situaciones, las cuales dependen de la aceleración, es decir, estado acelerado, estado nulo con velocidad máxima ó cero y estado desacelerado, donde esto fue explicado detalladamente por las ecuaciones (2-11),(2-12) y (2-13) respectivamente para cada estado.

- **Estado Nulo:** es debido a que el automóvil durante el recorrido puede presentar en dos situaciones una aceleración nula, por esta razón este estado se divide en dos modos:

1. S_{0m} : ocurre cuando el vehículo alcanza la velocidad máxima permitida en la vía, razón por la cual se debe mantener en esta velocidad, es decir, que su aceleración es nula.
 2. S_0 : cuando el vehículo se encuentra en reposo en la posición de un semáforo, esperando a que éste cambie a verde.
- **Estado Acelerado** (S_+): ocurre cuando el conductor aumenta su velocidad de forma constante; es decir, el automóvil tiene una aceleración constante y positiva a_+ hasta que alcanza la velocidad de cruce permitida sobre la vía.
 - **Estado Desacelerado** (S_-): cuando el vehículo se ve forzado a disminuir su velocidad de forma constante, debido a que el semáforo se encuentra en rojo, es decir, el vehículo presenta una aceleración negativa $-a_-$.

Para representar las órbitas que se estudiarán, se adoptará la notación explicada anteriormente y resumida en la Tabla (4-1), la cual dependerá del estado en que se encuentre el vehículo:

Tabla 4-1.: Estados del Sistema

Estado	Notación
Estado Nulo $v = 0$	S_0
Estado Nulo v_{max}	S_{0m}
Estado Acelerado	S_+
Estado Desacelerado	S_-

4.1. Órbita 1T-periódica

Usando la Fig.(2-7) y la notación de la tabla (4-1), se obtiene la Fig.(4-3), la cual es representación gráfica para la órbita 1T-periódica para el modelo (2-5).

De la Fig.(4-3) y haciendo uso de la Tabla (4-1), la órbita 1T-periódica se denota como $1T_{S_+S_{0m}S_-S_0}$.

Primero que todo es importante aclarar la notación utilizada en la Fig.(4-3):

- $x_1^{(i)}$: la posición final en el i-ésimo tramo.

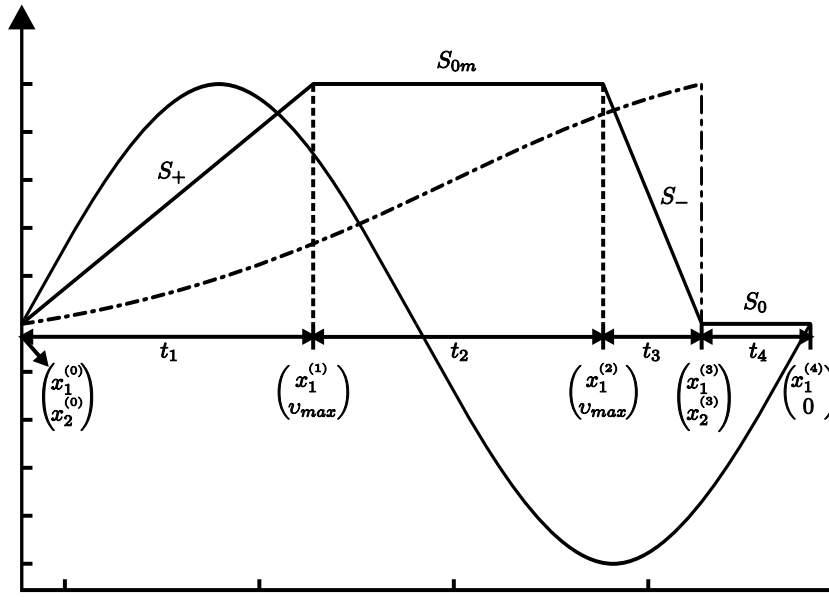


Figura 4-3.: Órbita 1T periódica

- $x_2^{(i)}$: la velocidad final en el i -ésimo tramo.
- $x_1^{(0)}$: posición inicial de la trayectoria.
- $x_2^{(0)}$: velocidad inicial de la trayectoria.

donde $i = 1, 2, 3, 4$. Además, se considera un tramo a una parte de la trayectoria en la cual se conserva un estado. Por ejemplo, el primer tramo en la Fig.(4-3) inicia cuando el vehículo presenta una posición $x_1^{(0)}$ y una velocidad $x_2^{(0)}$ y termina cuando el vehículo tiene una velocidad máxima v_{max} y se encuentra en la posición $x_1^{(1)}$. De esta manera la órbita 1T-periódica tiene cuatro tramos, dado que ocurren cuatro cambios de estado.

Para determinar la posición y la velocidad final $x_1^{(4)}$ y $x_2^{(4)}$ respectivamente, en el cuarto tramo en términos de las condiciones iniciales $x_1^{(0)}$ y $x_2^{(0)}$, es necesario hacer uso de las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

$$v_f = at + v_0 \quad (4-1)$$

$$v_f^2 = 2a(x - x_0) + v_0^2 \quad (4-2)$$

$$x_f = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \quad (4-3)$$

En la Fig.(4-3) se observa que en el cuarto tramo el automóvil se encuentra en el estado nulo (S_0), es decir, el vehículo se encuentra en reposo por lo tanto

$$\begin{aligned} x_1^{(4)} &= x_1^{(3)} \\ x_2^{(4)} &= x_2^{(3)}. \end{aligned}$$

Para determinar estas incógnitas es necesario conocer la posición y la velocidad final de cada tramo.

Para encontrar la posición final en el primer tramo $x_1^{(1)}$ se utilizan las Ec.(4-3) y Ec.(4-1)

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{(v_{max} - x_0^2)^2}{a_+} + x_0^{(2)} \frac{v_{max} - x_2^{(0)}}{a_+} + x_1^{(0)} \quad (4-4)$$

donde el tiempo de viaje en el primer tramo es:

$$t_1 = \frac{v_{max} - x_2^{(0)}}{a_+}.$$

Utilizando la Ec.(4-1) es posible encontrar la posición final $x_1^{(2)}$ del segundo tramo luego:

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + v_{max}t_2 \quad (4-5)$$

donde el tiempo de viaje en el segundo tramo t_2 es una incógnita.

Por último se tiene que la posición final $x_1^{(3)}$ en el tercer tramo está dada por:

$$x_1^{(3)} = x_1^2 + \frac{v_{max}^2}{2a_-} \quad (4-6)$$

y así reemplazando la Ec.(4-4) y Ec.(4-5) en Ec.(4-6) y al considerar el tiempo de viaje en el tercer tramo como $t_3 = \frac{v_{max}}{a_-}$ se tiene que:

$$x_1^{(3)} = \frac{(v_{max} - x_2^{(0)})^2}{2a_+} + x_2^{(0)} \frac{v_{max} - x_2^{(0)}}{a_+} + x_1^{(0)} + v_{max}t_2 + \frac{v_{max}^2}{2a_-} \quad (4-7)$$

De la Ec.(4-7), se observa que la posición final en el tercer tramo $x_1^{(3)}$ depende de las condiciones iniciales $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ y el tiempo de viaje en el segundo tramo t_2 . De esta manera $x_1^{(3)}$ se puede expresar como una función así:

$$x_1^{(3)} = h(t_2, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$$

Dado que la Ec.(4-7) depende del tiempo de viaje del segundo tramo, es necesario encontrar a t_2 .

Como la distancia entre semáforos consecutivos es $L_n = L$, entonces ésta puede expresarse como:

$$L = x_1^{(1)} + v_{max}t_2 + \frac{v_{max}^2}{2a_-}$$

donde

$$t_2 = \frac{1}{v_{max}} \left(L - x_1^{(1)} - \frac{v_{max}^2}{2a_-} \right)$$

y sustituyendo $x_1^{(1)}$, el tiempo de viaje del segundo tramo queda determinado así:

$$t_2 = \frac{1}{v_{max}} \left(L - \frac{(v_{max} - x_2^{(0)})^2}{2a_+} - x_2^{(0)} \frac{v_{max} - x_2^{(0)}}{a_+} - x_1^{(0)} - \frac{v_{max}^2}{2a_-} \right)$$

De la ecuación anterior se observa que el tiempo de viaje del segundo tramo depende de $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, por lo tanto, es posible expresarlo como una función en términos de las condiciones iniciales

$$t_2 = k(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}).$$

Además, al observar la Fig.(4-3) y dado que el vehículo se detuvo al terminar el tercer tramo, la velocidad final en el tercer tramo es:

$$x_2^{(3)} = 0.$$

Como el interés de esta sección es estudiar la estabilidad de la órbita $1T_{S_+S_{0m}S_-S_0}$, es necesario encontrar la matriz Jacobiana:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial x_1^{(0)}} & \frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial x_2^{(0)}} \\ \frac{\partial x_2^{(3)}}{\partial x_1^{(0)}} & \frac{\partial x_2^{(3)}}{\partial x_2^{(0)}} \end{pmatrix}$$

Para encontrar las derivadas parciales de primer orden, se debe tener en cuenta que $x_1^{(3)} = h(t_2, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ y $t_2 = k(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$, por lo tanto:

$$\frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial x_1^{(0)}} = \frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial t_2} \frac{\partial t_2}{\partial x_1^{(0)}} + \frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial x_1^{(0)}} \quad (4-8)$$

y las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial t_2} = v_{max}$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial x_1^{(0)}} = -\frac{1}{v_{max}}$$

$$\frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial x_1^{(0)}} = 1$$

Al reemplazar las derivadas en la Ec.(4-8) se tiene que:

$$\frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial x_1^{(0)}} = 0.$$

De igual manera se encuentra $\frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial x_2^{(0)}}$ donde:

$$\frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial x_2^{(0)}} = \frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial x_2^{(0)}} + \frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial t_2} \frac{\partial t_2}{\partial x_2^{(0)}} \quad (4-9)$$

y las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial x_2^{(0)}} = -\frac{v_{max} - x_2^{(0)}}{a_+} + \frac{v_{max} - 2x_2^{(0)}}{a_+}$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial x_2^{(0)}} = \frac{1}{v_{max}} \left(\frac{v_{max} - x_2^{(0)}}{a_+} - \frac{v_{max} - 2x_2^{(0)}}{a_+} \right)$$

$$\frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial t_2} = v_{max}$$

luego

$$\frac{\partial x_1^{(3)}}{\partial x_2^{(0)}} = 0.$$

Como $x_2^{(3)} = 0$, las derivadas parciales son $\frac{\partial x_2^{(3)}}{\partial x_1^{(0)}} = 0$ y $\frac{\partial x_2^{(3)}}{\partial x_2^{(0)}} = 0$.

Reemplazando las derivadas parciales encontradas en la matriz Jacobiana se tiene:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la matriz Jacobiana es la matriz nula entonces hay dos valores propios cero asociados a J_1 , esto significa que la órbita $1T_{S_+S_{0m}S_-S_0}$ es superestable [63, 25, 17].

Pedro Lind [44], dice que para un mapa M -dimensional discreto, si el producto de los valores propios de la matriz jacobiana del mapa, es nulo entonces la órbita periódica es superestable.

4.2. Órbita 2T-periódica

Usando la Fig.(2-9) y la notación de la tabla (4-1) se obtiene la Fig.(4-4), ésta es la representación gráfica de la órbita 2T-periódica para el modelo (2-5).

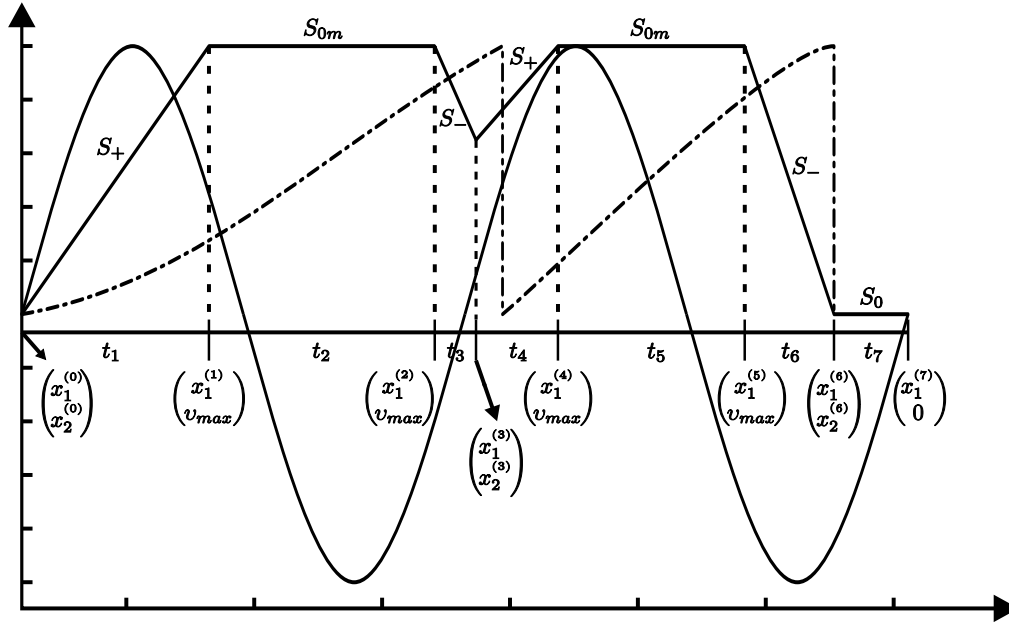


Figura 4-4.: Órbita 2T-Periódica

Nuevamente, teniendo en cuenta los estados observados sobre la Fig.(4-4) y haciendo uso de la Tabla (4-1), la órbita 2T-periódica se denota como $2T_{S+S_0mS-S+S_0mS-S_0}$.

Recuérdese que:

- $x_1^{(i)}$: la posición final en el i-ésimo tramo.
- $x_2^{(i)}$: la velocidad final en el i-ésimo tramo.
- $x_1^{(0)}$: posición inicial de la trayectoria.
- $x_2^{(0)}$: velocidad inicial de la trayectoria.

donde $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, la órbita 2T-periódica tiene siete tramos, dado que ocurre siete cambios de estado.

Nuevamente, como en la sección anterior es necesario determinar la posición y la velocidad final en el séptimo tramo $x_1^{(7)}$ y $x_2^{(7)}$ respectivamente, en términos de las condiciones iniciales $x_1^{(0)}$ y $x_2^{(0)}$; para esto es necesario hacer uso de las ecuaciones del movimiento rectilíneo

uniformemente acelerado.

En la Fig.(4-4) se observa que en el séptimo tramo el automóvil se encuentra en el estado nulo (S_0); es decir, el vehículo se encuentra en reposo por lo tanto

$$\begin{aligned}x_1^{(7)} &= x_1^{(6)} \\x_2^{(7)} &= x_2^{(6)}\end{aligned}$$

Para determinar estas incógnitas es necesario conocer la posición y la velocidad final de cada tramo.

La posición final en el primer tramo está dado por:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{(v_{max} - x_2^{(0)})^2}{a_+} + x_{(0)}^{(2)} \frac{v_{max} - x_2^{(0)}}{a_+} + x_1^{(0)} \quad (4-10)$$

donde el tiempo de viaje en el primer tramo es:

$$t_1 = \frac{v_{max} - x_2^{(0)}}{a_+}.$$

La posición final en el segundo tramo está dado por:

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + v_{max} t_2 \quad (4-11)$$

El tiempo de viaje en el segundo tramo es

$$t_2 = T - t_1 - t_3$$

donde T es el ciclo del semáforo y $t_3 = \frac{x_2^{(3)} - v_{max}}{-a_-}$.

Para el tercer tramo de viaje la posición final $x_1^{(3)}$ es:

$$x_1^{(3)} = x_1^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{(x_2^{(3)} - v_{max})^2}{a_-} - v_{max} \frac{x_2^{(3)} - v_{max}}{a_-} \quad (4-12)$$

Haciendo uso de las Ec.(4-10,4-11), se tiene que la Ec.(4-12) en términos de las condiciones iniciales está dada por:

$$\begin{aligned}x_1^{(3)} &= \frac{1}{2} \frac{(v_{max} - x_2^{(0)})^2}{a_+} + x_2^{(0)} \frac{v_{max} - x_2^{(0)}}{a_+} + x_1^{(0)} \\&+ v_{max} (T - t_1 - t_3) - \frac{1}{2} \frac{(x_2^{(3)} - v_{max})^2}{a_-} - v_{max} \frac{x_2^{(3)} - v_{max}}{a_-}\end{aligned} \quad (4-13)$$

De igual manera la velocidad final $x_2^{(3)}$, en este mismo tramo, está determinada por:

$$\left(x_2^{(3)}\right)^2 = -2a_- \left(x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right) + v_{max}^2 \quad (4-14)$$

La posición final en el cuarto tramo $x_1^{(4)}$ y en el quinto tramo $x_1^{(5)}$ están dadas por:

$$x_1^{(4)} = \frac{v_{max}^2 - \left(x_2^{(3)}\right)^2}{2a_+} + x_1^{(3)}$$

$$x_1^{(5)} = x_1^{(4)} + v_{max}t_5$$

Dado que se esta trabajando con una órbita 2T-periódica y con ayuda de la Fig.(4-4), se tiene que:

$$2L = x_1^{(4)} + v_{max}t_5 + \frac{v_{max}^2}{2a_-},$$

luego, el tiempo de viaje en el quinto tramo t_5 está dado por:

$$t_5 = \frac{1}{v_{max}} \left(2L - \frac{v_{max}^2 - \left(x_2^{(3)}\right)^2}{2a_+} - \frac{v_{max}^2}{2a_-} - x_1^{(3)} \right).$$

Ahora, reemplazando la Ec.(4-13) en t_5 , se tiene:

$$t_5 = \frac{1}{v_{max}} \left(2L - \frac{v_{max}^2 - \left(x_2^{(3)}\right)^2}{2a_+} - \frac{v_{max}^2}{2a_-} - \frac{1}{2} \frac{\left(v_{max} - x_2^{(0)}\right)^2}{a_+} - x_2^{(0)} \frac{v_{max} - x_2^{(0)}}{a_+} - x_1^{(0)} \right) \quad (4-15)$$

$$- \frac{1}{v_{max}} \left(v_{max}(T - t_1 - t_3) - \frac{1}{2} \frac{\left(x_2^{(3)} - v_{max}\right)^2}{a_-} - v_{max} \frac{x_2^{(3)} - v_{max}}{a_-} \right)$$

Finalmente, en el sexto tramo la posición final $x_1^{(6)}$ esta determinada por:

$$x_1^{(6)} = \frac{v_{max}^2}{2a_-} + v_{max}t_5 + \frac{v_{max}^2 - \left(x_2^{(3)}\right)^2}{2a_+} + \frac{v_{max}^2 - \left(x_2^{(3)}\right)^2}{2a_-} + \quad (4-16)$$

$$\frac{v_{max}^2 - \left(x_2^{(0)}\right)^2}{2a_+} + v_{max} \left(T - \frac{v_{max} - x_2^{(0)}}{a_+} + \frac{x_2^{(3)} - v_{max}}{a_-} \right) + x_1^{(0)}$$

como el vehículo se detiene al final del sexto tramo, la velocidad final es:

$$x_2^{(6)} = 0.$$

El objetivo de esta sección es determinar la estabilidad de la órbita $2T_{S_+S_{0m}S_-S_+S_{0m}S_-S_0}$, para esto es necesario encontrar la matriz Jacobiana:

$$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^{(6)}}{\partial x_1^{(0)}} & \frac{\partial x_1^{(6)}}{\partial x_2^{(0)}} \\ \frac{\partial x_2^{(6)}}{\partial x_1^{(0)}} & \frac{\partial x_2^{(6)}}{\partial x_2^{(0)}} \end{pmatrix}$$

Para encontrar los valores propios asociados a J_2 , se deben encontrar las respectivas derivadas:

como $x_2^{(6)} = 0$, luego $\frac{\partial x_2^{(6)}}{\partial x_1^{(0)}} = 0$ y $\frac{\partial x_2^{(6)}}{\partial x_2^{(0)}} = 0$.

Para encontrar las componentes de la primera fila de J_2 , se calcularan por medio de la siguiente expresiones:

$$\frac{\partial x_1^{(6)}}{\partial x_1^{(0)}} = \left(\frac{\partial x_1^{(6)}}{\partial t_5} \right) \left(\frac{\partial t_5}{\partial x_1^{(0)}} \right) + \frac{\partial x_1^{(6)}}{\partial x_1^{(0)}} \quad (4-17)$$

$$\frac{\partial x_1^{(6)}}{\partial x_2^{(0)}} = \left(\frac{\partial x_1^{(6)}}{\partial t_5} \right) \left(\frac{\partial t_5}{\partial x_2^{(0)}} \right) + \frac{\partial x_1^{(6)}}{\partial x_2^{(0)}}. \quad (4-18)$$

Usando las Ec.(4-15) y Ec.(4-16), se encuentran las derivadas:

$$\frac{\partial x_1^{(6)}}{\partial t_5} = v_{max}$$

$$\frac{\partial t_5}{\partial x_1^{(0)}} = -\frac{1}{v_{max}}$$

$$\frac{\partial x_1^{(6)}}{\partial x_1^{(0)}} = 1$$

Reemplazando, las respectivas derivadas en Ec(4-17)

$$\frac{\partial x_1^{(6)}}{\partial x_1^{(0)}} = v_{max} \left(-\frac{1}{v_{max}} \right) + 1$$

luego,

$$\frac{\partial x_1^{(6)}}{\partial x_1^{(0)}} = 0$$

Derivando nuevamente las Ec.(4-15) y Ec.(4-16) respecto a $x_2^{(0)}$

$$\frac{\partial t_5}{\partial x_2^{(0)}} = \frac{1}{v_{max}} \left(\frac{v_{max} - x_2^{(0)}}{a_+} - \frac{v_{max} - 2x_2^{(0)}}{a_+} \right)$$

$$\frac{\partial x_1^{(6)}}{\partial x_2^{(0)}} = -\frac{2x_2^{(0)}}{a_+} + \frac{v_{max}}{a_+}$$

Por lo tanto, reemplazando las respectivas derivadas en Ec(4-18) se tiene:

$$\frac{\partial x_1^{(6)}}{\partial x_2^{(0)}} = \frac{v_{max}}{a_+}$$

De lo anterior, la matriz Jacobiana J_2 queda determinada así:

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_{max}}{a_+} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se pretende estudiar la estabilidad de la órbita, es necesario encontrar los valores propios asociados a J_2 , para esto se resuelve la ecuación característica

$$\det(J_2 - \lambda I) = 0,$$

luego

$$\lambda^2 = 0$$

Por lo tanto, la matriz jacobiana J_2 tiene dos valores propios nulos, lo cual indica que la órbita $2T_{S_+S_{0m}S_-S_+S_{0m}S_-S_0}$ es superestable [18, 47].

El hecho de que las órbitas 1T-periódica y 2T-periódica sean superestables indican que las soluciones del sistema, bajo pequeñas modificaciones en las condiciones iniciales, no difieren.

Es importante resaltar la diferencia entre una órbita estable y una órbita superestable con relación a la tasa de convergencia. El libro *Exploring chaos: Theory and experiment* [18], establece que una órbita estable tiene una tasa de convergencia lineal y, en una órbita superestable la tasa de convergencia es cuadrática.

5. Consumo de combustible

El interés de este nuevo capítulo es realizar una aproximación del consumo de combustible del modelo estudiado en el capítulo dos; donde se considera un sólo vehículo que viaja sobre una vía que tiene n semáforos, que presentan distancias fijas entre ellos, es decir, $L_n = L$. Además, la función que modela el semáforo es $\text{sen}(T_s \tau)$; esto indica que todos los semáforos tienen la misma frecuencia de cambio y el mismo ciclo, $\omega_n = \omega$, $T_n = T$ respectivamente, y un desfase nulo, $\varphi_n = 0$.

Para realizar la aproximación de combustible se utilizaran dos conceptos básicos de la física, trabajo y energía, recuérdese que estos están íntimamente ligados. En primer lugar, cuando se realiza un trabajo sobre un cuerpo, se le transfiere una cierta cantidad de energía que se manifiesta en el movimiento, por lo que se habla de energía cinética. En segundo lugar, el trabajo neto realizado por la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es igual al cambio de energía cinética, es decir, a la diferencia de la energía cinética final y la inicial[61].

Es importante recordar que el vehículo viaja sobre una trayectoria recta donde se cumplen las condiciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

5.1. Energía-trabajo

El consumo de combustible es afectado principalmente por las condiciones atmosféricas, el número de paradas, las aceleraciones y la velocidad promedio del vehículo [48].

Para este trabajo de investigación se supone que el móvil se desplace sobre una trayectoria recta estando sometido a una aceleración o desaceleración ambas constantes, por esta razón no se tendrá en cuenta las condiciones atmosféricas. Especialmente se realizará el cálculo del consumo de combustible para la órbita 1T-periódica, 2T-periódica y finalmente para la Ola verde, donde estas órbitas fueron encontradas en el modelo estudiado del capítulo dos.

En primer lugar se considera la potencia instantánea P , como la porción de transferencia de energía E en el tiempo t [61, 64].

$$P = \frac{dE}{dt}$$

Si una fuerza externa se la aplica a un objeto y si el trabajo invertido por esta fuerza en el objeto en el intervalo de tiempo Δt es ΔW , la potencia promedio durante ese intervalo es

$$P_{prom} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

además la potencia instantánea es el valor límite de la potencia promedio a medida que Δt tiende a cero:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

donde dW representa el valor infinitesimal del trabajo invertido. Además se tiene que

$$dW = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

donde

- \vec{F} : el vector fuerza.

- \vec{v} : el vector velocidad.

En consecuencia, la potencia instantánea se escribe

$$P = \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

luego,

$$E = E(0) + \int_{t_0}^{t_f} Fv dt$$

- t_f : tiempo final del trayecto.

- t_0 : tiempo inicial del trayecto.

- F : el módulo del vector fuerza.

- v : el módulo del vector velocidad.

- t : tiempo.

Según [65], el consumo del combustible C puede ser estimado como:

$$C = \int_{t_0}^{t_f} Fv dt$$

Es importante aclarar que se considerará la fuerza de fricción F_r , la cual es opuesta al movimiento, no se considerará fuerzas externas como la resistencia aerodinámica y se omite también la energía gastada debido a fricciones internas en el mecanismo del vehículo.

A continuación se realiza una descripción de las fuentes de disipación en el movimiento del vehículo; las cuales dependerán del estado (acelerado, nulo y desacelerado) en que se encuentre el vehículo. Para representar los estados del vehículo, se adoptará la notación explicada en el capítulo anteriormente y resumida en la Tabla (4-1).

1. Cuando el vehículo inicie el recorrido con velocidad inicial v_0 y el conductor acelere hasta alcanzar la velocidad máxima o crucero permitida sobre la vía, el cambio de energía cinética se calcula así:

$$E_{a+} = \frac{mv_{max}^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

2. Recuérdese, que la fuerza de rozamiento es estimada como:

$$F_r = \mu mg$$

donde

- μ : es el coeficiente de fricción cinético.
- m : la masa del vehículo.
- g : la gravedad.

por lo tanto, si el vehículo recorre una distancia x_r libre de paradas, el trabajo realizado que se opone a la fuerza de rozamiento y suponiendo un coeficiente de rozamiento μ constante en toda la vía, esta determinado por:

$$W_r = F_r x_r.$$

3. Si el vehículo viaja con una velocidad máxima hasta alcanzar la distancia de seguridad y el semáforo se encuentra en rojo entonces el conductor se ve obligado a frenar hasta llegar a la velocidad mínima v_{min} ; por lo tanto la energía perdida mientras desacelera es:

$$E_{a-} = \frac{mv_{max}^2}{2} - \frac{mv_{min}^2}{2}$$

4. Cuando el vehículo se encuentre en reposo junto al semáforo esperando la luz verde, el consumo del combustible en reposo C_r se considerará nulo.

Con lo anterior, se procede a calcular el consumo del combustible para la órbita 1T-periódica, 2T-periódica y la Ola verde para el modelo bajo los supuestos nombrados anteriormente.

5.2. Consumo de combustible para una órbita 1T-periódica

En la Fig.(5-1), se observa la representación gráfica de una órbita $1T_{S_+S_{0m}S_-S_0}$ para el modelo de estudio.

Para calcular el consumo de combustible del vehículo aplicado a la órbita $1T_{S_+S_{0m}S_-S_0}$, se hará por medio de los estados (acelerado, nulo y desacelerado). Para este caso, sólo basta

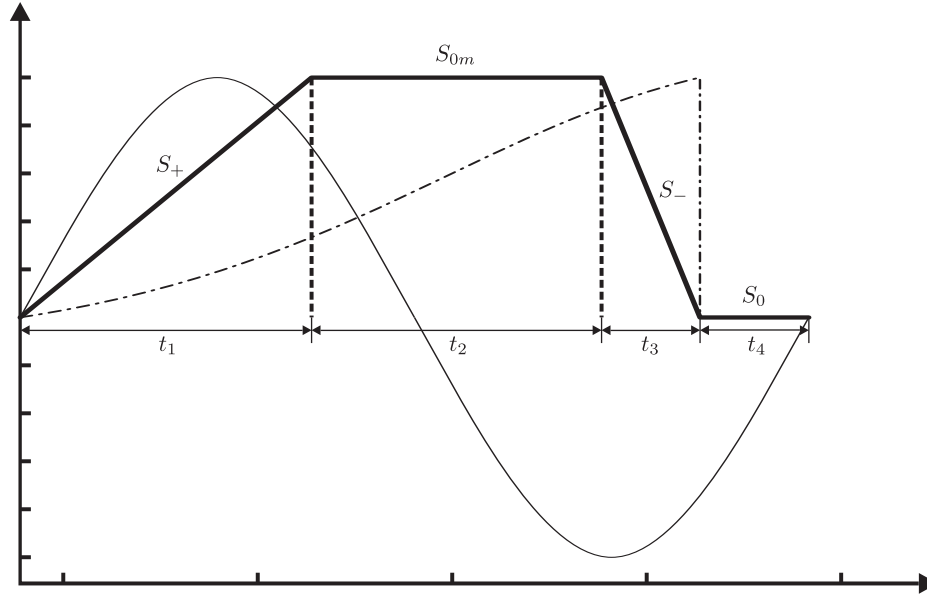


Figura 5-1.: Órbita 1T-Periódica

calcular y sumar la energía de cada estado y de esta manera se tendría una aproximación del consumo de combustible entre dos semáforos consecutivos. Al multiplicar el valor encontrado por el número de trayectos $n - 1$ se obtendrá el total de combustible gastado durante el viaje, donde n es el número de semáforos, además se considera que un trayecto es el recorrido entre dos semáforos consecutivos.

En la órbita 1T-periódica ocurre cuatro cambios de estado.

Estado acelerado S_+

El vehículo se encuentra en reposo con velocidad inicial $v_0 = 0$ y posición inicial $x_0 = 0$ he inicia su recorrido con una aceleración a_+ hasta alcanzar la velocidad máxima v_{max} , entonces la enegía en este estado, se expresa así:

$$E_{a+} = \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

Para encontrar la distancia recorrida x_{r1} durante este estado se utiliza una de las ecuaciones del MRUA,

$$v_f^2 = 2a(x - x_0) + v_0^2$$

por lo tanto

$$x_{r1} = \frac{v_{max}^2}{2a_+}$$

luego, el trabajo que se opone a la fuerza de rozamiento es:

$$W_{r1} = F_r x_{r1}.$$

luego, el consumo de combustible en este estado es aproximadamente:

$$C_+ = \frac{mv_{max}^2}{2} + F_r x_{r1}$$

Estado nulo S_{0m}

En este estado el vehículo viaja con la velocidad máxima permitida sobre la vía, siendo esta constante, luego su aceleración es nula. Luego solo se considerará el trabajo provocado por la fuerza de rozamiento así:

$$C_{0m} = W_{r2} = \mu mg x_{r2},$$

donde

$$x_{r2} = L - \left(\frac{v_{max}^2}{2a_+} + \frac{v_{max}^2}{2a_-} \right)$$

Estado desacelerado S_-

Ocurre cuando el conductor se ve obligado a frenar el vehículo hasta detenerse, dado que encuentra el semáforo en rojo. Como la fuerza de rozamiento es opuesta a la dirección del movimiento y el automóvil esta siendo frenado entonces no se considerará un trabajo por F_r . De esta manera la energía cinética seria:

$$C_- = E_{a-} = \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

Estado nulo S_0

Como el vehículo se encuentra en reposo entonces el consumo del combustible es proporcional al tiempo de espera junto al semáforo, es decir, $C_0 = \lambda t_e$ donde t_e es el tiempo que espera el conductor hasta que el semáforo pasa a verde y λ es la constante de proporcionalidad. Pero el consumo de combustible se considera casi nulo, es decir, $C_0 \approx 0$.

Combustible total

De lo anterior, se tiene que el consumo de combustible total es la suma del consumo en cada estado, es decir,

$$C \approx C_+ + C_{0m} + C_- + C_0$$

luego, el consumo de combustible total entre dos semáforos consecutivos es:

$$C \approx \frac{mv_{max}^2}{2} + F_r x_r + \frac{mv_{max}^2}{2} \quad (5-1)$$

donde la distancia que recorre el vehículo sin detenerse es $x_r = x_{r1} + x_{r2}$.

Como el objetivo es encontrar el consumo de combustible gastado durante el recorrido a través de la secuencia de n semáforos para la órbita 1T-periódica, entonces se multiplica la Ec.(5-1) por el número de trayectos $n - 1$.

Luego, el consumo total de combustible durante todo el viaje está dado por:

$$C_T = (n - 1) \left(\frac{mv_{max}^2}{2} + F_r x_r + \frac{mv_{max}^2}{2} \right) \quad (5-2)$$

5.2.1. Consumo de combustible normalizado

Con el fin de eliminar las unidades y el parámetro m (masa del vehículo) de la Ec.(5-1), es necesario encontrar el consumo de combustible normalizado, para esto primero se define el consumo de combustible libre de paradas C_l .

Considérese que el consumo de combustible libre de paradas es:

$$C_l = (n - 1)LF_r + \frac{mv_{max}^2}{2}$$

donde $(n - 1)L$ es la distancia total del recorrido y $\frac{mv_{max}^2}{2}$ es la energía empleada desde el reposo hasta alcanzar la velocidad máxima .

Reemplazando en la expresión anterior, la fuerza de rozamiento por $F_r = \mu mg$, se tiene que:

$$C_l = m \left(\mu g(n - 1)L + \frac{v_{max}^2}{2} \right). \quad (5-3)$$

Para normalizar el consumo de combustible se define una nueva variable normalizada como:

$$C_n = \frac{C_T}{C_l}$$

donde C_T es el consumo de combustible total del recorrido.

Luego, haciendo uso de la Ec.(5-2) y del consumo libre de paradas C_l Ec.(5-3) se tiene que el consumo de combustible normalizado se define como:

$$C_{n1} = \frac{1}{C_l}(n - 1) \left(\frac{mv_{max}^2}{2} + F_r x_r + \frac{mv_{max}^2}{2} \right)$$

donde C_{n1} será llamado consumo de combustible normalizado para la órbita 1T-periódica.

5.3. Consumo de combustible para una órbita 2T-periódica

En la Fig.(5-2), se observa la representación gráfica de una órbita 2T-periódica para el modelo con los supuestos nombrados anteriormente.

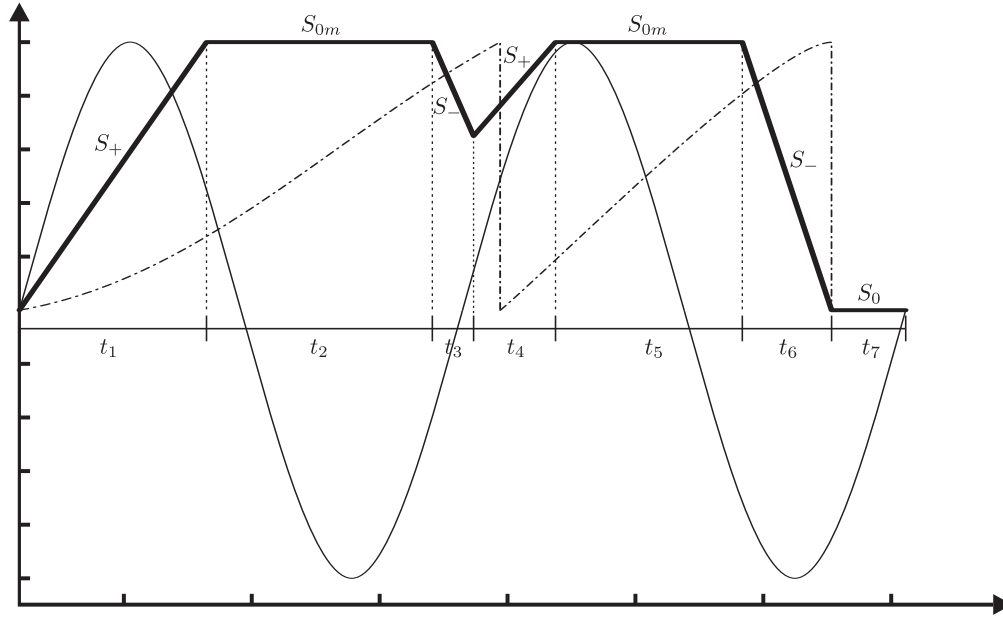


Figura 5-2.: Órbita 2T-Periódica

Para calcular el consumo de combustible del vehículo utilizando la órbita $2T_{S_+S_{0m}S_-S_+S_{0m}S_-S_0}$, se hará por medio de los estados (acelerado, desacelerado y nulo). Para este caso, solo basta calcular y sumar la energía de cada estado y de esta manera se tendría una aproximación del consumo de combustible entre tres semáforos consecutivos.

Para entender mejor el porque de tres semáforos, obsérvese la Fig.(5-2) donde la distancia normalizada se representa con la línea discontinua. Cuando la distancia es nula indica que el vehículo se encuentra junto a un semáforo y cuando toma el valor máximo ilustra que el vehículo ha llegado al siguiente semáforo. Por ejemplo, en la Fig.(5-2) se observa que en dos períodos la distancia es nula en tres ocasiones y máxima en dos. Por lo tanto, en este caso se tiene tres semáforos consecutivos.

Para la órbita 2T-periódica ocurre siete cambios de estados del vehículo, para calcular el consumo de combustible en cada estado se hará uso de los términos explicados en la sección sec.(5.1).

Estado acelerado S_+

El vehículo se encuentra en reposo con velocidad y posición iniciales $v_0 = 0$ y $x_0 = 0$ respectivamente he inicia su recorrido con una aceleración a_+ hasta alcanzar la velocidad máxima v_{max} , entonces haciendo uso de las ecuaciones del MRUA, se tiene que la distancia recorrida durante este estado es dada por:

$$x_{r1} = \frac{v_{max}^2}{2a_+}$$

luego, el consumo de combustible en este estado es aproximadamente:

$$C_+ = \frac{mv_{max}^2}{2} + F_r x_{r1}$$

Estado nulo S_{0m}

Para este estado el vehículo viaja con velocidad máxima constante donde su aceleración es nula, luego solo se considerará el trabajo debido por la fuerza de rozamiento:

$$C_{0m} = W_{r2} = F_r x_{r2}$$

donde $x_{r2} = v_{max} t_2$, además los tiempos de viaje t_i , con $i=1,2,3$ son definidos así:

- Tiempo de viaje en el primer tramo $t_1 = \frac{v_{max}}{a_+}$
- Tiempo de viaje en el segundo tramo $t_2 = T - t_1 - t_3$
- Tiempo de viaje en el tercer tramo $t_3 = \frac{v_{min} - v_{max}}{-a_-}$

donde T es el ciclo del semáforo, además en el tercer tramo el vehículo se ve forzado a frenar dado que el semáforo se encuentra en rojo como lo indica la función seno entonces se denotará a v_{min} como la velocidad mínima que llega el vehículo en el instante que el semáforo conmuta a verde y el conductor acelera de nuevo. Además el tiempo total empleado desde que inicia el recorrido hasta que termina el tercer tramo es un período T como se observa en la Fig.(5-2).

Estado desacelerado S_-

Ocurre cuando el conductor se ve obligado a frenar el vehículo hasta llegar a la velocidad mínima v_{min} . Como la fuerza de rozamiento actúa en contra del movimiento y el auto está siendo frenado entonces no se considerará el trabajo ejercido por F_r . De esta manera el trabajo neto es igual al cambio de la energía cinética

$$C_- = W_{a_-} = \frac{mv_{max}^2 - mv_{min}^2}{2}.$$

Estado acelerado S_+

Como el vehículo se ve obligado a acelerar de nuevo dado que el semáforo retorna a verde y alcanza la velocidad máxima, además la distancia recorrida durante este estado es:

$$x_{r4} = \frac{v_{max}^2 - v_{min}^2}{2a_+}$$

luego, el consumo de combustible en este estado es aproximadamente:

$$C_+ = \frac{mv_{max}^2 - mv_{min}^2}{2} + F_r x_{r4}$$

Estado nulo S_{0m}

Nuevamente, de la Fig.5-2, se observa que el vehículo alcanza la velocidad máxima constante, por lo tanto el trabajo en función del rozamiento es:

$$C_{0m} = W_{r5} = F_r x_{r5}$$

donde

$$x_{r5} = 2L - (x_{r1} + x_{r2} + x_{r3} + x_{r4})$$

y $x_{r3} = \frac{v_{min}^2 - v_{max}^2}{-2a_-}$, es la distancia recorrida en el tercer tramo, las otras distancias fueron encontradas en los estados anteriores.

Estado nulo S_0

Como el vehículo se encuentra en reposo entonces el consumo del combustible se considerará nulo $C_0 = 0$.

Combustible total

De lo anterior, se tiene que el consumo de combustible total entre los tres semáforos consecutivos es la suma del consumo en cada estado,

$$C \approx \frac{mv_{max}^2}{2} + F_r x_{r1} + F_r x_{r2} + \frac{mv_{max}^2 - mv_{min}^2}{2} + \frac{mv_{max}^2 - mv_{min}^2}{2} + F_r x_{r4} + F_r x_{r5} \quad (5-4)$$

Como el objetivo es encontrar una expresión que represente el consumo de combustible gastado durante todo el recorrido a través de la secuencia de n semáforos para la órbita 2T-periódica, se debe tener en cuenta que un vehículo completa un trayecto cuando ha atravesado tres semáforos consecutivos, y esto hace que la expresión general del consumo de combustible para esta órbita 2T-periódica dependa de que si el número de semáforos n , es par o impar.

- Para comprender mejor lo que ocurre cuando n es impar, observe la Fig(5-2). Luego, si el número de semáforos es impar, es decir, $n = 2k + 1$ donde k es el número de trayectos, entonces el consumo de combustible total se expresa como:

$$C_{T(impar)} \approx k \left(\frac{mv_{max}^2}{2} + F_r x_{r1} + F_r x_{r2} + \frac{mv_{max}^2 - mv_{min}^2}{2} + \frac{mv_{max}^2 - mv_{min}^2}{2} + F_r x_{r4} + F_r x_{r5} \right) \quad (5-5)$$

- Para entender mejor lo que ocurre cuando n es par, observe la Fig.(5-4)

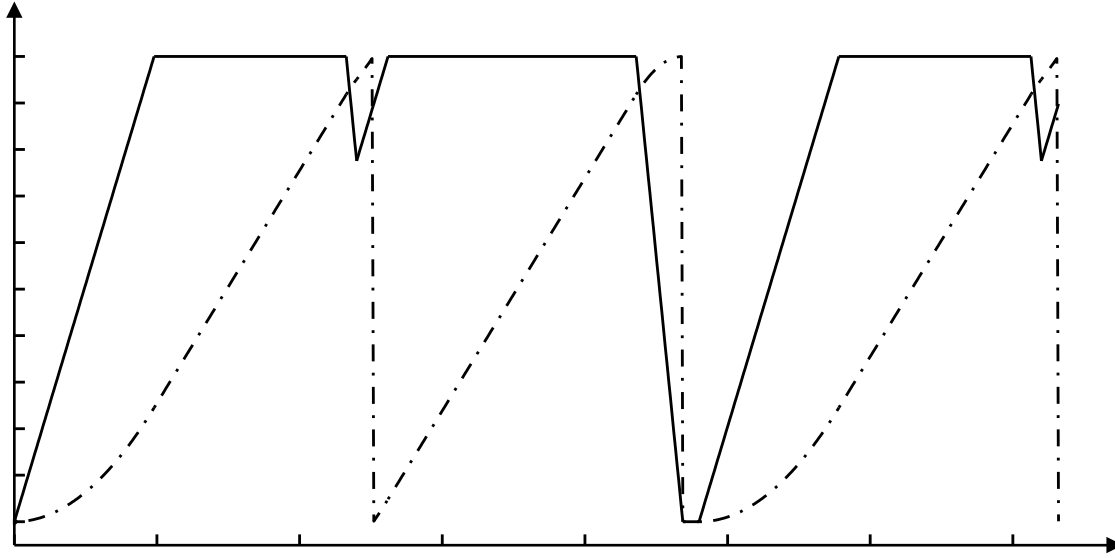


Figura 5-3.: Órbita 2T-Periódica, n par

Si n es par puede ser expresado así $n = (2k + 1) + 1$ donde k es el número de trayectos entonces el consumo de combustible total se expresa como:

$$C_{T(par)} \approx k \left(\frac{mv_{max}^2}{2} + F_r x_{r1} + F_r x_{r2} + \frac{mv_{max}^2 - mv_{min}^2}{2} + \frac{mv_{max}^2 - mv_{min}^2}{2} + F_r x_{r4} + F_r x_{r5} \right) + \left(\frac{mv_{max}^2}{2} + F_r x_{r1} + F_r x_{r2} + \frac{mv_{max}^2 - mv_{min}^2}{2} + \frac{mv_{max}^2 - mv_{min}^2}{2} \right)$$

5.3.1. Consumo de combustible normalizado

Con el fin de eliminar las unidades y el parámetro m (masa del vehículo) del consumo total de combustible para la órbita 2T-periódica, se hará el mismo proceso que en la sección sec.(5.2). Para esto se utilizará la Ec.5-3) que se refiere al consumo libre de paradas C_l .

Como la expresión general del consumo de combustible para la órbita 2T-periódica depende de que si el número de semáforos n , es par o impar. Por esta razón se realizará dos normalizaciones.

- Si el número de semáforos es impar, se utiliza la Ec.(5-5), de esta manera el consumo de combustible normalizado se expresa así

$$C_{n(impar)} = \frac{C_{T(impar)}}{C_l}$$

- Si el número de semáforos es par, el consumo de combustible normalizado es

$$C_{n(par)} = \frac{C_{T(par)}}{C_l}$$

5.4. Consumo del combustible para la ola verde

En la Fig.(5-4), se observa la representación gráfica de una Ola verde.

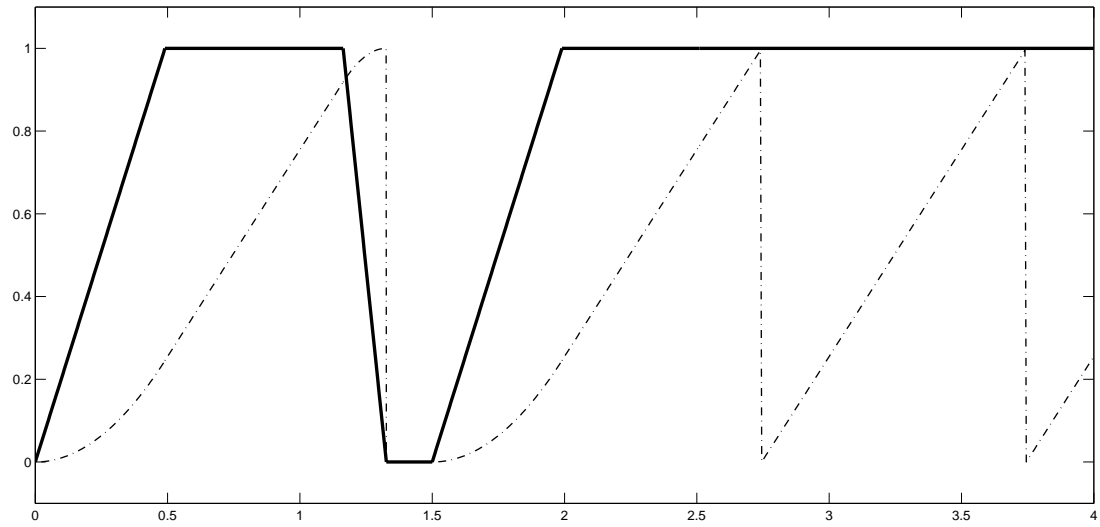


Figura 5-4.: Ola Verde

Para calcular el consumo de combustible del vehículo cuando ocurre el fenómeno de Ola verde, se debe tener en cuenta que el conductor se detiene una sólo vez durante el viaje y que el resto del recorrido logra cruzar todos los semáforos con la velocidad máxima permitida.

Obsérvese en la Fig.(5-4) que el vehículo inicia su recorrido pero se ve forzado a detenerse en el siguiente semáforo dado que éste se encuentra en rojo como lo indica la función seno. Luego espera un tiempo hasta que la luz verde aparece y así seguir con su recorrido a través de la vía. Entonces para este caso basta con calcular el consumo de combustible gastado hasta que inicia de nuevo su viaje y sumarle el consumo gastado en el resto de la secuencia de semáforos.

- Para la primera parte, se calcula el consumo de combustible gastado entre los dos primeros semáforos, el cual es similar al calculado en la sección sec.(5.2)

Por lo tanto, el consumo de combustible gastado entre los dos primeros semáforos esta determinado por:

$$C_1 \approx \frac{mv_{max}^2}{2} + F_r x_r + \frac{mv_{max}^2}{2}$$

Donde $x_r = x_{r1} + x_{r2}$, además

$$x_{r1} = \frac{v_{max}^2}{2a_+}$$

$$x_{r2} = L - \left(\frac{v_{max}^2}{2a_+} + \frac{v_{max}^2}{2a_-} \right)$$

- Para el resto del recorrido, es importante observar en la Fig.(5-4) que el vehículo solo presenta dos estados S_+ y S_0 , luego el consumo de combustible C_2 esta determinado por:

$$C_2 \approx \frac{mv_{max}^2}{2} + F_r(n-2)L$$

Por lo tanto, el consumo de combustible total para la Ola verde puede expresarse como:

$$C_T = C_1 + C_2$$

5.4.1. Consumo de combustible normalizado

Nuevamente, con el fin de eliminar las unidades y el parámetro m (masa del vehículo) de la Ec.(5-2), es necesario encontrar el consumo de combustible normalizado.

Recuérdese que el consumo de combustible libre de paradas es:

$$C_l = m \left(\mu g(n-1)L + \frac{v_{max}^2}{2} \right).$$

Luego, haciendo uso del consumo de combustible total para la Ola verde y del consumo libre de paradas C_l , se define el consumo de combustible normalizado como:

$$C_{nv} = \frac{1}{C_l} \left(\frac{mv_{max}^2}{2} + F_r x_r + \frac{mv_{max}^2}{2} + m t_r \delta + \frac{mv_{max}^2}{2} + F_r(n-2)L \right)$$

donde C_{nv} será llamado consumo de combustible normalizado para la Ola Verde.

6. Conclusiones

Se ha presentado un esquema de modelado y simulación suave a trozos para un sistema de tráfico. Para simular este sistema es necesario conocer las ecuaciones que describen su flujo en cada estado y las condiciones en las fronteras de transición entre los estados dinámicos. Con esta información y los diagramas de bifurcación es posible simular un amplio rango de fenómenos que este tipo de sistemas exhiben. Ejemplo de ello son los comportamientos periódicos, bifurcaciones suaves y no suaves e incluso caos que se reflejan en los diagramas de bifurcación.

Desde el punto de vista de la teoría de bifurcaciones, los resultados presentados en este documento son una herramienta útil para mejorar el modelo, de manera que, en trabajos futuros se desarrollen estrategias de control con el propósito de alcanzar dinámicas específicas como la ola verde.

Se eligió un marco adecuado para modelar y simular el sistema. Donde el ciclo del semáforo es un parámetro importante como se evidencia en los diagramas de bifurcación. Por lo anterior, cuando el ciclo del semáforo es próximo a uno, la ola verde aparece, de esta manera el tiempo de viaje es menor, dado que logra recorrer toda la secuencia de semáforos en verde. Así es posible implementar estrategias de optimización basadas en el ciclo del semáforo.

Los beneficios para el sistema de tráfico vehicular que se discutieron en este documento, inicialmente, son la reducción en el tiempo de viaje y en el consumo del combustible debido a la configuración de los semáforos, bajo la condición de un ciclo de semáforo que minimice el número de paradas en un trayecto, en investigaciones futuras, estudiar el efecto de posibles combinaciones entre los valores de los parámetros que definen el sistema.

El análisis numérico realizado, ha permitido ver los efectos de la fase del semáforo. Donde este, es un parámetro representativo del sistema, el cual aproxima el modelo a la dinámica real que se utiliza en los sistemas de tráfico de las ciudades. Y muestra como una adecuada configuración del mismo, genera y desaparece secciones de ola verde.

Es importante resaltar que una configuración adecuada de los semáforos, permite optimizar el tiempo de desplazamiento de un vehículo. De donde, una reducción en el número de paradas podría reducir el consumo de combustible y con ello sus efectos sobre el medio ambiente.

En la primera etapa, el trabajo se enfocó en el desarrollo de rutinas numéricas para simular el sistema dinámico no suave, siendo el principal objeto de estudio de esta investigación. Y con estas simulaciones numéricas se obtuvieron soluciones periódicas, bifurcaciones suaves y no suaves, fractalidad, hasta caos, son por mencionar algunos de los fenómenos que se hicieron evidentes.

En la segunda parte del trabajo, se realizó un análisis de estabilidad de dos tipos de órbitas periódicas, las cuales resultaron siendo superestables. El hecho de que las órbitas 1T-periódica y 2T-periódica sean superestables indican que las soluciones del sistema, bajo pequeñas modificaciones en las condiciones iniciales, no difieren.

Finalmente, se realizó una aproximación del consumo de combustible, mediante el uso de un conjunto de herramientas de la mecánica clásica. Este cálculo se hizo para tres tipos de soluciones que son: la órbitas 1T-periódica, 2T-periódica y la ola verde. Y con esto se evidenció, que cuando aumenta el número de paradas de un vehículo a través de una vía el consumo de combustible también aumenta. Por esta razón configurar los semáforos para obtener una ola verde trae grandes beneficios para el conductor como son la reducción en el tiempo de viaje y en el consumo de combustible, dado que el número de paradas es mínimo.

A. Anexo: Trabajos futuros

A continuación se presentaran algunas técnicas y propuestas de investigación que permitirán extender este trabajo desde diferentes aspectos.

En primer lugar se hará una breve introducción a la *teoría de control*, segundo se hablará de la ecuación de *Euler- Lagrange* para problemas de optimización y por último se propondrán algunos problemas de investigación.

A.1. Control Óptimo

El desarrollo de la teoría del control óptimo se inició en la década de los cincuenta, motivados especialmente por problemas aeroespaciales. Los ingenieros se interesaron en problemas de controlar un sistema gobernado por un conjunto de ecuaciones diferenciales. En algunos problemas aeroespaciales grandes ahorros en el costo se podrían obtener con una pequeña mejora en el rendimiento de modo que una operación óptimo se convirtió en una técnica muy importante [37].

La teoría de control óptimo es una herramienta matemática muy útil que puede ser utilizada en la toma de decisiones que involucran problemas físicos, biológicos, económicos, entre otros. Por ejemplo: si se desea controlar la trayectoria de una nave espacial, con condición inicial $x(t_0)$, para lograr una condición final $x(t_f)$, el estado del sistema $x(\cdot)$ podría representar la posición y velocidad de la nave y el control $u(\cdot)$ representar la la fuerza o aceleración necesaria para lograr tal objetivo. Con esta formulación, este ejemplo representa un problema para la Teoría de Control, la cual hace énfasis en el análisis sobre las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de los controles adecuados, y su computabilidad, así como también de la existencia, unicidad, y estabilidad de la trayectoria que garantice el logro de dicho objetivo. Ahora bien, si además se desea lograr tal propósito en un tiempo mínimo, o con el mínimo uso de combustible, entonces este es un problema de control óptimo. En tal caso, se quiere minimizar una funcional que depende del estado del sistema y del control llamada funcional de costo [23].

Otro ejemplo, puede ser encontrar el porcentaje de la población que debe ser vacunada para minimizar el número de infectados de una población y el costo de implementación de la vacuna.

A.1.1. Problema de control óptimo

Un problema de control óptimo típico se plantea con tres elementos básicos. El primero de ellos es un sistema dinámico que describe la situación a investigar

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t))$$

Donde $x(t) \in \Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ son las variables de estado y $u(t) \in \Omega_u \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de controles, de este modo, el segundo elemento importante en el planteamiento del problema de control es el conjunto u de todos los controles admisibles; generalmente este conjunto se define por medio de restricciones sobre el vector de controles $u(t)$. Finalmente, debe plantearse una función a maximizar o minimizar $J(x(t), u(t))$. Generalmente J describe los costos (directos e indirectos) de aplicar los controles sobre el sistema con el fin de llevarlo al estado final deseado, por tal razón se le conoce como función o funcional de costos [67].

Si un control u^* es tal que minimiza la funcional de costo J , es decir, si $J(x(t), u^*) \leq J(x(t), u)$ $\forall u(t) \in \Omega_u$ entonces u^* se denomina control óptimo [23].

En el cálculo clásico de variaciones hay tres problemas de optimización llamados *problema de Bolza*, *problema de Lagrange* y *problema de Mayer* [77].

- **Problema de Mayer:** el funcional de costos es de la forma:

$$J(x(t), u(t)) = h(x(\tau), \tau)$$

sujeto al sistema dinámico

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t))$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y condiciones en la frontera $x(\tau) = x_\tau$.

- **Problema de Lagrange:** el funcional de costos tiene la siguiente forma:

$$J(x(t); u(t)) = \int_0^\tau g(x(t); u(t)) dt$$

sujeto al sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t))$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y condiciones en la frontera $x(\tau) = x_\tau$.

- **Problema de Bolza:** al hacer una combinación de las dos formas anteriores, se tiene que la función de costos es de la forma:

$$J(x(t); u(t)) = h(x(\tau), \tau) + \int_0^\tau g(x(t); u(t)) dt$$

sujeta al sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t))$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y condiciones en la frontera $x(\tau) = x_\tau$ [67, 45].

Condiciones necesarias para la optimalidad de un problema de control óptimo fueron obtenidas por *Pontryagin*, *Boltyanskii* y *Gamkrelidze*. A estas condiciones necesarias se le ha llamado *Principio de Pontryagin* [77].

A.1.2. Principio del máximo de Pontryagin

Dado el siguiente problema de control, donde el funcional de costos es de la forma:

$$J(x(t); u(t)) = h(x(\tau), \tau) + \int_0^\tau g(x(t); u(t)) dt$$

sujeto al sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t))$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y condiciones en la frontera $x(\tau) = x_\tau$ donde $u(t) \in \Omega_u$

El principio establece, bajo ciertas condiciones para f y el conjunto de controles Ω_u , que si u^* es un control óptimo y x^* es la solución del sistema dinámico que corresponde a u^* , entonces existe una constante $\sigma < 0$ y una función vectorial $\eta \in \mathbb{R}^n$ tales que la pareja (σ, η) no es idénticamente nula, η es absolutamente continua y

$$\frac{d\eta}{dt} = -H_x(x^*, u^*, \eta)$$

$$\frac{dx^*}{dt} = -H_\eta(x^*, u^*, \eta)$$

$$H(x^*, u^*, \eta) = \max_{u \in \Omega} \{H(x, u, \eta)\}$$

donde H es el *hamiltoniano* dado por:

$$H(x, u, \eta) = \sigma g(x, u, t) + \eta \cdot f(x, u)$$

con $\eta \cdot f$ que denota el producto interior de η con f . El problema de control óptimo se llama singular si el determinante $\det(H\eta\eta)$ se anula en todo punto a lo largo de la trayectoria óptima, en caso contrario se dice no singular. En particular si el Hamiltoniano es lineal con respecto a una o más de las funciones componentes del control, entonces dicho problema resulta ser singular. La función $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_n(t))$ es llamada vector de variables adjuntas y determinan el sistema adjunto dado por

$$\frac{dx^*}{dt} = -H_\eta(x^*, u^*, \eta)$$

. Una interpretación de

$$H(x^*, u^*, \eta) = \max_{u \in \Omega} \{H(x, u, \eta)\} \tag{A-1}$$

es que para todo tiempo t , el valor u^* del control óptimo debe maximizar el valor del *hamiltoniano* sobre todo valor admisible $u \in \Omega_u$. Es importante observar que si u^* cae en Ω_u entonces de (A-1) se deduce que,

$$Hu(x, u, \eta) = 0$$

Por lo tanto, resolviendo este sistema de ecuaciones es posible determinar el control óptimo u^* . Con lo que se tiene hasta ahora, es posible resolver el problema de contorno,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u^*) \\ \frac{d\eta}{dt} = -H_x \\ x(0) = x_0, \\ \eta(\tau) = \varphi(x(\tau)) \end{cases}$$

Dado un problema de optimización

$$\min J(x(t); u(t)) = h(x(\tau), \tau) + \int_0^\tau g(x(t); u(t)) dt$$

sujeto al sistema dinámico $\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t))$ y tal que $x(\tau)$ se encuentra en algún conjunto objetivo $G(x(\tau))$, se tiene que la condición de transversalidad está dada por

$$\phi(\tau) = \nabla h(x(\tau)) + \sum_{i=1}^k c_i g_i(x(\tau))$$

La función h es conocida como costo terminal.

A continuación se desarrolla un ejemplo donde se aplica la teoría de control óptimo explicada.

Ejemplo

Minimizar el funcional de costos

$$J(x, u, t) = \int_0^4 u^2(t) + x(t) dt$$

sujeto a:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(t) \\ x(0) = 0 \\ x(4) = 1 \end{cases}$$

Para la aplicación del Principio del máximo se define la variable adjunta $\lambda \in \mathbb{R}$ y el *Hamiltoniano*

$$H = u^2 + x + \lambda u$$

luego, se calcula la condición de primer orden $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, la cual permite determinar el control óptimo.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0$$

por lo tanto,

$$u^*(t) = -\frac{\lambda}{2}.$$

La ecuación adjunta esta definida en el principio del máximo como $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ de esta manera se tiene:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -1$$

resolviendo esta ecuación diferencial se encuentra la variable adjunta

$$\lambda(t) = k - t$$

para alguna constante k .

Reemplazando la variable $\lambda(t)$ en u^* , el control óptimo queda definido así:

$$u^*(t) = \frac{t - k}{2}$$

Luego, se reemplaza u^* en la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = u(t)$$

y se resuelve.

Por lo tanto

$$x^*(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{kt}{2} + c$$

donde c es una constante.

Haciendo uso de las condiciones de frontera $x(0) = 0$ y $x(4) = 1$, se tiene que $c = 0$ y $k = \frac{3}{2}$, por lo tanto

$$u^*(t) = \frac{2t - 3}{4}$$

y

$$x^*(t) = \frac{t^2 - 3t}{4}$$

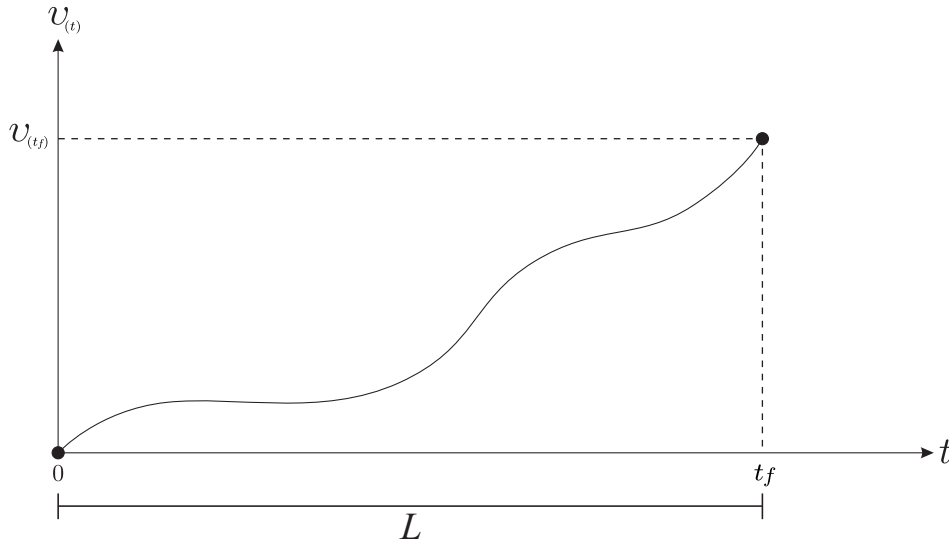


Figura A-1.: Perfil de velocidad

Propuesta

Construir un problema de control, donde se defina un funcional de costos J que permita encontrar un perfil de velocidad óptimo $v^*(t)$ que minimice el tiempo de viaje y/o el consumo de combustible de un vehículo, cuando éste recorre una distancia L sobre una vía. Ver Fig.(A-1)

A.2. Optimización

El cálculo de variaciones surgió a finales del siglo *XVII* y se convirtió en una rama sólida de las matemáticas, sólida y rigurosa con los trabajos de *Euler* (1707 – 1783) y Lagrange (136 – 1813). *Euler* en 1744 publica su libro *Método de búsqueda de líneas curvas on propiedades de máximo o mínimo, o la resolución del problema isoperimétrico tomado en su sentido más amplio*. En este trabajo se generalizó los problemas estudiados por los hermanos *Bernoulli* (en particular, el de la braquistótrona), además encuentra la conocida ecuación diferencial de *Euler-Lagrange* que resulta **la condición necesaria de primer orden** en el Cálculo de Variaciones. Pese a la practicidad del método, éste tenía cierta falta de rigor pero esta situación cambió en 1755 como consecuencia de la propuesta en común de ideas por parte de *Euler* y *Lagrange* [13]

A.2.1. Ecuación de Euler Lagrange

Problema de optimización

Sea $f(x)$ una función real y de clase C^2 donde $t_0 \leq x \leq t_1$. Entonces dado el funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(x, \dot{x}, t) dt$$

donde $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, se debe encontrar aquella función (trayectoria) $x^*(t)$, con primera y segunda derivadas continuas en $[t_0, t_1]$, verificando $x^*(t_0) = x_0$ y $x^*(t_1) = x_1$, siendo x_0 y x_1 dados para que el funcional J alcance su máximo o el valor mínimo.

Entonces para resolver el problema de optimización anterior se sugiere en [6], aplicar el teorema de condición necesaria de primer orden conocida como *Ecuación de Euler-Lagrange* la cual se define así:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

donde la solución debe cumplir $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$.

Es importante tener claro lo siguiente:

- si se pretende maximizar el funcional J , el integrando $f(x, \dot{x}, t)$ debe ser una función cóncava en alguna vecindad. [13].
- si quiere minimizar $f(x, \dot{x}, t)$ debe ser una función convexa en alguna vecindad. [13].
- El proceso de maximizar puede usarse de forma análoga al proceso de minimizar, basta observar que $\min(J(\cdot)) = -\max(J(\cdot))$ [6].

Ejemplo

A continuación se desarrolla un problema de optimización con el objetivo de resolverlo usando la *ecuación de Euler-Lagrange*, bajo los siguientes supuestos:

- La inyección total de energía debido a la aceleración del vehículo desde el reposo hasta alcanzar la velocidad v es $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.
- Si el vehículo recorre una distancia L libre de paradas, el trabajo realizado que se opone a la fuerza de rozamiento y suponiendo un coeficiente de rozamiento μ constante en toda la vía, esta determinado por: $W_r = F_r x_r$, donde la fuerza de rozamiento es $F_r = \mu mg$.
- El motor del vehículo es modelado como si fuera una banda elástica, la cual impulsa el vehículo. luego la energía potencial elástica es $E_p = \frac{1}{2}kv^2$, donde k es la constante de elasticidad.
- No se considera la resistencia aerodinámica.

Luego, usando los supuestos anteriores se propone minimizar el funcional definido así:

$$J = \int_0^{t_f} \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - F_r x \right) dt$$

sujeto a

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ x(0) = 0 \\ x(t_f) = L \end{cases}$$

Donde

- $x(t)$: es la posición del vehículo en el tiempo t .
- $v(t)$: es la velocidad del vehículo en el tiempo t .
- t_f : tiempo final empleado para recorrer una distancia L .
- $x(0) = 0$ y $x(t_f) = L$ son las condiciones de frontera.

Entonces para resolver el problema de optimización anterior se sugiere en [6], aplicar el teorema de condición necesaria de primer orden conocida como *Ecuación de Euler-Lagrange* la cual se define así:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

Como $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v$ y $F_r = \mu mg$, se tiene que:

$$f(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - \mu mgx = 0$$

Calculando las respectivas derivadas, la respectiva *Ecuación de Euler-Lagrange* es:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - kx + \mu mg = 0$$

con condiciones de frontera $x(0) = 0$ y $x(t_f) = L$

La ecuación resultante es lineal de segundo orden con coeficientes constantes, luego la solución general se expresa así:

$$x(t) = c_1 \exp \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + c_2 \exp \left(-\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + \frac{\mu mg}{k}$$

Para calcular las constantes c_1 y c_2 se hace uso de las condiciones de frontera $x(0) = 0$ y $x(t_f) = L$.

Al derivar la solución $x(t)$ con respecto al tiempo se obtiene la velocidad del vehículo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = c_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \exp \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - c_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \exp \left(-\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

Propuesta

Construir un problema de optimización, donde se defina un funcional de costos J que permita encontrar un perfil de velocidad que minimice el tiempo de viaje y/o el consumo de combustible de un vehículo, cuando éste recorre una distancia L sobre una vía. Donde se modele la fuerza de avance proporcionada por el motor del vehículo y se considere la resistencia aerodinámica.

A.3. Otras propuestas

- Modelar la dinámica de un sólo vehículo que viaja a través de una secuencia de semáforos de tres estados (verde, amarillo y rojo) los cuales están separados entre sí una distancia L_n . Con base en el modelo propuesto en esta investigación.
- Modelar el comportamiento de un sólo vehículo que viaja a través de una secuencia de semáforos de tres estados (verde, amarillo y rojo) donde se incluyan pasos peatonales.
- Modelar y estudiar el comportamiento entre varios vehículos, cuando estos viajan a través de una secuencia de semáforos de tres estados (verde, amarillo y rojo) los cuales están separados entre sí una distancia L_n .
- Dada una intersección con algunas entradas y salidas, construir dos modelos para estudiar el tráfico vehicular. El primero, cuando se considera que en las intersecciones hay semáforos y otro cuando se incluye una rotonda. Además realizar una comparación entre los modelos y determinar cual de estos dos mecanismos es preferible para abordar la regulación del tráfico.
- Realizar y analizar un modelo de flujo de tráfico usando redes. Por ejemplo, donde se considere que los nodos son las intersecciones entre las vías. Además donde en algunos cruces se considere o no la existencia de un semáfor.

Bibliografía

- [1] ADAME R, A: *Contaminación Ambiental*. Trillas, Mexico, 1993
- [2] ALLENDE, A.; Lema C. y Pedreira L.: Un análisis de los modelos y métodos de optimización del tráfico urbano. En: *XVII Jornadas ASEPUMA, V Encuentro Internacional* 17(1) (2005), p. 702
- [3] ALLSOP, R E.: SIGSET: A computer program for calculating traffic signal settings. En: *Traffic Engineering y Control* 13(2) (1971)
- [4] ALLSOP, R E.: SIGCAP: A computer program for assessing the traffic capacity of signal-controlled road junctions. En: *Traffic Engineering y Control* 338,341 (1976)
- [5] ÁLVAREZ, L.: *Simulación y control tráfico vehicular*. Universidad Nacional Autónoma de México, 2005. – p.5 p.
- [6] AXELSSON, V.A: *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*. Siam, 2001
- [7] BELLOMO, Ch.: On the Modeling of Traffic and Crowds: A Survey of Models, Speculations, and Perspectives. En: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 53(3) (2011), p. 409
- [8] BERTHELIN, P; Delitala M; Rascle M.: A Model for the Formation and Evolution of Traffic Jams. En: *Springer* 187) (2008), p. 185
- [9] BORSCHÉ, R.: Coupling traffic flow networks to pedestrian motion. En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 24) (2014), p. 359
- [10] BORSCHÉ, R.: Interaction of road networks and pedestrian motion at crosswalks. En: *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S* 14) (2014), p. 363
- [11] BRETTI, M; Cristiani M.: An easy-to-use algorithm for simulating traffic flow on networks: Numerical experiments. En: *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S* 7 (2014), p. 379
- [12] BRETTI, R; Piccoli R.: A Fluid-Dynamic Traffic Model on Road Networks. En: *Archives of Computational Methods in Engineering, Springer* 14) (2007), p. 139

- [13] CAMPERO, J.N: *Propuesta didáctica en optimización dinámica: El caso de cálculo de variaciones y control óptimo*. México, Instituto politecnico nacional, centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, Tesis de Doctorado, 2010
- [14] CAMPOS, J.: *Prolegómenos a los sistemas dinámicos*. Universidad Nacional de Colombia. Sede Bogotá., 2002
- [15] CHITOUR, Yacine Benedetto P.: Traffic circles and timing of traffic lights for cars flow. En: *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B* 5 (2005), p. 599
- [16] COCLITE, M; Piccoli B.: Traffic Flow on a Road Network. En: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 36) (2005), p. 1862
- [17] DAVIES, Brian: *Exploring Chaos: Theory and Experiment*. Perseus Books Publishing, L.L.C., 1999
- [18] DAVIES, Brian: *Exploring Chaos: Theory and Experiment*. Perseus Books Publishing, L.L.C., 1999
- [19] DE SCHUTTER, B: Optimal Traffic Light Control for a Single Intersection. En: *European Journal of Control* 4(3) (1998), p. 260
- [20] DEXTRE, L. F.: Modelo de simulación de tráfico vehicular. En: *Universidad Católica de Perú* (1990)
- [21] ELORRIETA, S.: *Libro verde de medio ambiente urbano*. España : Ministerio del Medio Ambiente España, 2007
- [22] ESPINOSA, C. y Avilés O.: Algoritmos de visión de máquina aplicados al control dinámico de intersecciones semáforizadas. En: *Dyna* 178 (2013), p. 132
- [23] FERREYRA, J: Control Óptimo Determinista via Programación Dinámica. En: *Divulgaciones Matemáticas* 7(2) (19991), p. 167
- [24] FUGENSCHUH, M; Herty A; Martin A.: A Discrete Optimization Approach to Large Scale Supply Networks Based on Partial Differential Equations. En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 30(3) (2008), p. 1490
- [25] GALLAS, Jason: *Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical models*. Vol. 196,223. 1994
- [26] GARAVELLO, B.: Coupling of microscopic and phase transition models at boundary. En: *Networks and Heterogeneous Media (NHM) (AIMS)* 8(3) (2013), p. 649
- [27] GIPPS, P.: *A behavioural car-following model for computer simulation*. Transportation Research, 1981. – p.105–111. p.

-
- [28] GOTTLICH, U.: Traffic light control: A case study. En: *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S (DCDS-S)* 7(3) (2014), p. 483
- [29] GREENBERG, H.: *An analysis of traffic flow*. Operations Research, 1959. – p.63 p.
- [30] GREENSHIELDS, B.D.: *A study in highway capacity, highway research board*. 1935
- [31] GUGAT, M; Klar A; Leugering G.: Optimal Control for Traffic Flow Networks. En: *Journal of Optimization Theory and Applications, Springer* 126(3) (2005), p. 589
- [32] HELBING, D.: Traffic and related self-driven many-particle systems. En: *Reviews of modern physics* 73) (2001), p. 1067
- [33] HERTY, A: Modeling, Simulation, and Optimization of Traffic Flow Networks. En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 25(3) (2003), p. 1066
- [34] HYUNHO, P; Seungje L; Hosang L; Seungkirl B.: Dynamic multi-interval bus travel time prediction using bus transit data. En: *Transportmetrica* 6(1):19-38 (2010)
- [35] JARAMILLO, D.: *Simulación y control de tráfico vehicular por semaforización*, Universidad Pontificia Bolivariana, Tesis de Grado, 2005
- [36] JIMENEZ, I: Sistema adaptativo de control y optimización del tráfico en un corredor vial semaforizado. Aplicación a la ciudad de Medellín. En: *Dyna* 169) (2001), p. 71
- [37] JONSSON, P: *Division of Optimization and systems Theory*. 10044 Stockholm, Sweden : Royal Institute of Technology, 2002
- [38] KERNER, P.: Cluster effect in initially homoneous traffic flow. En: *Physical Review* I 2 (12) (October 1993)
- [39] KLAR, M; Materne T.: Derivation of Continuum Traffic Flow Models from Microscopic Follow-the-Leader Models. En: *SIAM J. Appl. Math.* 63(1) (2002), p. 259
- [40] KUZNETSOV, Y.A: *Elements of applied bifurcation theory*. Second edition : Springer, 1998
- [41] LEBACQUE, M. M.: First Order Macroscopic Traffic Flow Models for Networks in the Context of Dynamic Assignment. En: *Springer* 64) (2002), p. 119
- [42] LEI, P ; Li L ; Zhenjiang L.: A Fast Signal Timing Algorithm for Individual Oversaturated Intersections. En: *Intelligent Transportation Systems, IEEE* 12(1) (2011)
- [43] LIGHTHILL, G.: *On kinematic waves a theory of trafic flow on long crowded roads*. Department of Mathematics, University of Manchester, 1955

-
- [44] LIND, Pedro: *Pattern Formation in Diffusive-Advective Networks of Discrete-Time Oscillators*. Universidad de Lisboa-Portugal, PhD Thesis, 2003
- [45] LOPEZ, M: *Control óptimo de la dinámica de reproducción del Aedes aegypti (Díptera: Culicidae)*. Facultad de Educación : Universidad del Quindío, 2010
- [46] LOZANO, Vicente; Antún J.: *Tráfico vehicular en zonas urbanas*. Universidad Nacional Autónoma de México, 2002. – p.37 p.
- [47] LUPANO, R.: *Políticas de movilidad urbana e infraestructura urbana de transporte*. Publicación de las Naciones Unidas, 2009
- [48] MARTÍNEZ, A; Bedoya C.: Evaluación de vehículos en Carretera. En: *Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería* (2004)
- [49] MARTÍNEZ, Y.: Semáforos inteligentes reducen la contaminación y agilizan el tráfico. En: *Tendencias21, Revista electrónica de ciencia, tecnología, sociedad y cultura* (2012)
- [50] NAGEL, M.: A celular automaton model for freeway traffic. En: *Physical Review I* 2 (12) (1992), p. 2221–2229
- [51] NATHAN, G.: Traffic Flow Theory. En: *University of Massachusetts-Lowell* (1975)
- [52] OLMOS, J.: A cellar automaton model for the traffic flow in Bogotá. En: *International Journal of Modern Physics, World Scientific Publishing Company* (2004)
- [53] OLMOS, J.: Traffic flow in Bogotá. En: *Universidad Nacional de Colombia* (2006)
- [54] PAPAGEORGIOU, C. ; Dinopoulou V. ; Kotsialos A. ; Yibing WangFerreya G; Pascal J.: Help Working with Abstracts Review of road traffic control strategies. En: *Proceedings of the IEEE* 91(12) (2003), p. 2043
- [55] RINALDO, M; Lécureux M.: A class of nonlocal models for pedestrian traffic. En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 22) (2012), p. 359
- [56] ROBLES, P; Quijano N.: Control y simulación de tráfico urbano en Colombia: Estado del arte. En: *Revista de Ingeniería, Universidad de los Andes, Bogotá Colombia*. (2009)
- [57] ROGELÉZ, F.: Prototipo de un Sistema de Semaforización Inteligente en la ciudad de Bogotá para mejorar los tiempos de recorrido del Sistema Transmilenio. En: *Universidad Piloto de Colombia, Facultad Ingeniería de Sistemas, Bogotá, Colombia*. 4(7) (2013), p. 10
- [58] SACONE, S.: A control scheme for freeway traffic systems based on hybrid automa. En: *Springer* (2011)

-
- [59] SALCEDO, L; Hernández C.: Modelo de semaforización inteligente para la ciudad de Bogotá. En: *Revista científica y tecnológica de la facultad de ingeniería, Universidad Distrital Francisco José de Caldas* 11 No 2 (2007)
- [60] SÁNCHEZ, M; Rubio E.: Genetic Algorithms and Cellular Automata: A New Architecture for Traffic Light Cycles Optimization. En: *Proceedings of The Congress on Evolutionary Computation* 2 (2004), p. 1668
- [61] SERWAY, J: *Física para Ciencias e Ingeniería*. Vol. Vol. 1. Séptima edición : Cengage Learning, 2008
- [62] SMITH, M. J.: Optimum network control using traffic signals, UK Developments in Road Traffic Signalling. En: *IEEE Colloquium* 4(3) (1988), p. 260
- [63] STROGATZ, STEVEN H.: *NONLINEAR DYNAMICS AND CHAOS*. Perseus Books Publishing, L.L.C., 1994
- [64] TIPPENS, P.E: *Física conceptos y aplicaciones*. Vol. Vol. 1. Séptima edición : Mc Graw Hill, 2011
- [65] TOLEDO, E; Rogan J; Munoz V; Tenreiro C; Zarama R; Valdivia J.: Universal and nonuniversal features in a model of city traffic. En: *Physical Review* 75(2) (2007), p. 026108
- [66] TOLEDO B.A; MUÑOZ, J; Tenreiro C; Valdivia J.: Modeling traffic through a sequence of traffic lights. En: *Physical Review* 70 (2004), p. 016107
- [67] TORO, H: *Modelo de la transmisión del dengue clásico durante un brote epidémico*. Facultad de Ciencias Básicas y Tecnologías Maestría en Biomatemáticas, Universidad del Quindío, Tesis de Maestría, 2010
- [68] UNDERWOOD, R. T.: Speed, volumen and density relationships, quality and theory of traffic flow. En: *Yale Bureau of Highway Traffic* 36) (1961), p. p.41
- [69] VALENCIA, G.: *Bifurcación por impacto con esquina en el sistema leva seguidor*, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de Grado, 2012
- [70] VARAS, M; Toledo B; Munoz V; Rogan J; Zarama R; Valdivia J.: Resonance, criticality, and emergence in city traffic investigated in cellular automaton models. En: *Physical Review* E 80 (2009)
- [71] VERGHESEA, S; Vanajakshib L.: Model based Traffic Control in Indian Conditions. En: *ELSEVIER* 104(2) (2013), p. 516

-
- [72] VILLALOBOS, B; Pastén D; Munoz V; Rogan J; Zarama R; Lammoglia N; Valdivia J.: Characterization of the nontrivial and chaotic behavior that occurs in a simple city traffic model Chaos. En: *An interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 20 (2010), p. 013109
 - [73] VILLALOBOS, J.: *Chaos in transit systems*. Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de los Andes, Tesis de Doctorado, 2010
 - [74] WANN-MING, W.: Applications of linear systems controller to a cycle-based traffic signal control. En: *Intelligent Transportation systems* 126(3) (2001), p. 179
 - [75] WARWICK, D.J: *Bifurcations in Piecewise-Smooth Continuous Systems*. University of British Columbia, Canada : World Scientific, 2010
 - [76] WEI-NENG, H.: Bus shedule interfered by traffic lights. En: *Chung Yuan Christian University* (2008)
 - [77] WENDELL, H; Raymond W.: *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. New York : Applications of Mathematics, Springer, 1975